



АЛГЕБРА

АЛГЕБРА

9





АЛГЕБРА

9 класс

Учебник

Допущено
Министерством просвещения
Российской Федерации

3-е издание, стереотипное

Москва
«Просвещение»
2022



УДК 373.167.1:512+512(075.3)
ББК 22.14я721
А45

Серия «Сферы» основана в 2003 году

Линия учебно-методических комплексов «СФЕРЫ» по алгебре

Авторы: канд. пед. наук **Е.А. Бунимович**, канд. пед. наук **Л.В. Кузнецова**,
канд. пед. наук **С.С. Минаева**, канд. пед. наук **Л.О. Рослова**, канд. пед. наук **С.Б. Суворова**

На учебник получены **положительные** заключения
научной (заключение РАО № 1137 от 19.11.2016 г.),
педагогической (заключение РАО № 1028 от 21.11.2016 г.)
и **общественной** (заключение РКС № 348-ОЭ от 19.12.2016 г.) экспертиз.

Издание выходит в pdf-формате.

Алгебра : 9-й класс : учебник : издание в pdf-формате / Е. А. Бунимович, Л. В. Кузнецова,
А45 С. С. Минаева и др. — 3-е изд., стер. — Москва : Просвещение, 2022. — 192 с. : ил. — (Сферы).
ISBN 978-5-09-101238-5 (электр. изд.). — Текст : электронный.
ISBN 978-5-09-094492-2 (печ. изд.).

Данный учебник по алгебре продолжает линию учебно-методических комплексов «Сферы» по математике, начатую учебниками для 5–8 классов. Издание подготовлено в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта. В содержательном плане материал учебника направлен на формирование центральных алгебраических понятий и развитие умения применять их при решении как математических задач, так и задач прикладного характера. Главными особенностями учебника являются фиксированный в тематических разворотах формат, лаконичность и жёсткая структурированность текста, структурированность системы упражнений, разнообразный иллюстративный ряд. Всё это направляет учащихся на осознанное овладение универсальными учебными действиями.

УДК 373.167.1:512+512(075.3)
ББК 22.14я721

Учебное издание

Серия «Сферы»

Бунимович Евгений Абрамович, **Кузнецова** Людмила Викторовна,
Минаева Светлана Станиславовна, **Рослова** Лариса Олеговна,
Суворова Светлана Борисовна

Алгебра

9 класс

Учебник

Центр математики

Ответственный за выпуск **Э.А. Мазурова**. Редактор **А.В. Каплиёв**
Художественный редактор **А.П. Асеев**. Художники **А.В. Юдин**, **С.Г. Куркина**, **А.П. Асеев**
Компьютерная вёрстка **А.П. Асеева**. Дизайн обложки **О.В. Поповича**, **В.А. Прокудина**
Технический редактор **С.Н. Терехова**. Корректор **И.А. Григалашвили**

Подписано в печать 01.02.2022.

Формат 84×108/16. Гарнитуры SchoolBookCSanPin, FreeSetC.
Уч.-изд. л. 17,13. Усл. печ. л. 20,16. Тираж экз. Заказ № .

Акционерное общество «Издательство «Просвещение».

Российская Федерация, 127473, г. Москва, ул. Краснопролетарская, д. 16, стр. 3, этаж 4, помещение I.

Адрес электронной почты «Горячей линии» – **vopros@pros.ru**.

ISBN 978-5-09-101238-5 (электр. изд.)
ISBN 978-5-09-094492-2 (печ. изд.)

© АО «Издательство «Просвещение», 2019
© Художественное оформление.
АО «Издательство «Просвещение», 2019
Все права защищены

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	5
---------------	---

ГЛАВА 1. НЕРАВЕНСТВА

1.1 Действительные числа	8
1.2 «Универсальное имя» действительных чисел	12
1.3 Общие свойства неравенств	16
1.4 Решение линейных неравенств	20
1.5 Решение систем линейных неравенств	26
1.6 Доказательство неравенств	30
1.7 Что означают слова «С точностью до...»	34
<i>Узнайте больше.</i> Периодические и непериодические бесконечные десятичные дроби	38
Ещё о средних	41
Подведём итоги	43

ГЛАВА 2. КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ

2.1 Квадратичная функция и её график	46
2.2 График и свойства функции $y = ax^2$	52
2.3 Сдвиг графика функции $y = ax^2$ вдоль осей координат	56
2.4 График функции $y = ax^2 + bx + c$	62
2.5 Квадратные неравенства	66
2.6 Метод интервалов	70
<i>Узнайте больше.</i> График дробно-линейной функции	72
Графики уравнений, содержащих модули	76
Подведём итоги	78

ГЛАВА 3. УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

3.1 Рациональные выражения	82
3.2 Тождество	88
3.3 Целые уравнения	92
3.4 Дробные уравнения	96
3.5 Решение задач	100
3.6 Графическое решение систем уравнений с двумя переменными	102

3.7	Алгебраическое решение систем уравнений с двумя переменными	106
3.8	Решение задач	112
3.9	Графическое решение уравнений с одной переменной	114
	<i>Узнайте больше.</i> Решение систем уравнений второй степени	118
	Уравнения с параметром	121
	Подведём итоги	124

ГЛАВА 4. АРИФМЕТИЧЕСКАЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИИ

4.1	Числовые последовательности	128
4.2	Арифметическая прогрессия	134
4.3	Сумма первых n членов арифметической прогрессии	140
4.4	Геометрическая прогрессия	144
4.5	Сумма первых n членов геометрической прогрессии	150
4.6	Простые и сложные проценты	154
	<i>Узнайте больше.</i> Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия	156
	Треугольник Паскаля	158
	Подведём итоги	160

ГЛАВА 5. СТАТИСТИКА, ВЕРОЯТНОСТЬ, КОМБИНАТОРИКА

5.1	Выборочные исследования	164
5.2	Интервальный ряд. Гистограмма	170
5.3	Характеристики разброса	174
5.4	Статистическое оценивание и прогноз	180
5.5	Размещения и сочетания	182
	<i>Узнайте больше.</i> Вероятность и комбинаторика	186
	Подведём итоги	188
ОТВЕТЫ		189

ВВЕДЕНИЕ

Уважаемые девятиклассники!

В девятом классе вы завершаете обучение в основной школе. Этот учебный год — итог большого и серьёзного периода школьной жизни, когда вам предстоит не только получить новые знания, но и обобщить, осмыслить многое из того, что вы узнали за годы освоения удивительного предмета — математики. Важным итогом в конце учебного года станет Основной государственный экзамен.

И всё же самое важное состоит в том, что вам не только предстоит выбрать свой дальнейший путь в старшей школе, но и сделать первые ответственные шаги в выборе того, чем вы планируете заниматься в дальнейшей жизни.

За годы учёбы вы не раз могли убедиться в уникальности роли и места математики среди всех наук, в универсальности языка математики, с помощью которого можно не только успешно описывать разнообразные процессы и явления в природе и обществе, но и использовать его в самых разных областях повседневной жизни человека.

Человеческая цивилизация прошла большой путь — от каменного века до цифрового. И каждому человеку цифрового века необходим свой, соответствующий его интересам и способностям уровень математической грамотности и культуры.

Ни технический, ни экономический прогресс, ни одно из достижений науки и техники, ни одно из самых удивительных свершений современного мира — от компьютеров до полётов в космос — были бы невозможны без математики. И какая бы область знаний вас ни привлекала, какой бы путь вы ни выбрали в дальнейшей жизни — всегда и везде математика будет вам надёжным помощником.

Если вас привлекает сама математика во всём её разнообразии и красоте или вам интересны компьютерные технологии, военное или инженерное дело, физика или биология, другие естественные науки или их практические приложения, то вам будет необходима самая серьёзная математическая подготовка. Но если вас интересуют иные, вроде бы более далёкие от математики области деятельности, если вы хотите стать экономистом или финансистом, юристом или педагогом, врачом или журналистом, если вы выберете любую рабочую профессию — всё равно добиться успеха, реализовать себя в этом деле без определённого уровня математической грамотности будет просто невозможно.

Современная математическая грамотность, математическая культура — это не только знания различных тем и областей школьной или даже высшей математики. Математическая культура — это, прежде всего, умение точно и чётко излагать свои мысли, строго и логично рассуждать, аргументировать и отстаивать свою точку зрения, доказывать утверждения, делать обоснованные выводы. А ещё математическая культура — это умение применять свои знания при решении конкретных задач, использовать уже известные алгоритмы и разрабатывать новые, привлекать все свои знания и интуицию в поиске нестандартных путей решения задач.

Вы стоите в начале большого и интересного пути, и мы желаем вам хороших дружеских отношений с математикой.

Желаем вам успеха!

РУБРИКИ НА СТРАНИЦАХ УЧЕБНИКА

На страницах учебника вы увидите специальные знаки, которые помогут вам в работе с текстом.

«ВНИМАНИЕ!» Так выделяется утверждение, которое нужно запомнить.

«В ФОКУСЕ». Важная деталь, на которую полезно обратить внимание.

«МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БЛОКНОТ». Небольшой фрагмент на полях, который содержит дополнительную информацию.

«ЗАПИСЫВАЕМ РЕШЕНИЕ». Образцы записи решений, которым можно следовать.

«СПРАВКА». Содержит полезный справочный материал.

1

Так обозначены упражнения полегче.

10

Так обозначены упражнения потруднее.

ГЛАВА 1

НЕРАВЕНСТВА

- ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА
- «УНИВЕРСАЛЬНОЕ ИМЯ» ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ
- ОБЩИЕ СВОЙСТВА НЕРАВЕНСТВ
- РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ
- РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ
- ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕРАВЕНСТВ
- ЧТО ОЗНАЧАЮТ СЛОВА «С ТОЧНОСТЬЮ ДО...»

Узнайте больше

- ☐ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ И НЕПЕРИОДИЧЕСКИЕ БЕСКОНЕЧНЫЕ ДЕСЯТИЧНЫЕ ДРОБИ
- ☐ ЕЩЁ О СРЕДНИХ

ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР

В 1725 г. была учреждена первая в России Санкт-Петербургская академия наук, куда был приглашён крупнейший математик Европы Леонард Эйлер. Почти полжизни провёл он в России, сыграв определяющую роль в становлении российской науки. Эйлер отличался феноменальной работоспособностью. Необыкновенно широк был круг его работ, охвативших практически все разделы современной ему математики и механики, теорию упругости, математическую физику, оптику, теорию музыки, теорию машин, баллистику, морскую науку, страховое дело и т.д.

Невозможно перечислить все донныне употребляемые теоремы, методы и формулы Эйлера. Вам уже знакомы круги Эйлера, а в старшей школе во всех странах до сих пор изучают тригонометрию и логарифмы в том виде, какой придали им Леонард Эйлер. Студенты изучают высшую математику по руководствам, первыми образцами которых явились классические труды Эйлера.

1.1

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Какие числа составляют множество действительных чисел.
- О соответствии между множеством действительных чисел и множеством точек координатной прямой.

Можно сказать, что натуральные числа заложены самой природой и человеку оставалось только открыть их. Отрицательные же числа абсолютно «ненатуральные», это чистое изобретение математиков. И то, что мы пользуемся ими, например при измерении температуры воздуха, связано только с условным выбором начала отсчёта. В то же время отрицательные числа оказались удобными для обозначения величин, изменяющихся в противоположных направлениях. А самое главное, без них невозможно было бы развитие аппарата решения уравнений: имея отрицательные числа, мы можем не задумываться, какое число получится при переносе слагаемого из одной части уравнения в другую.

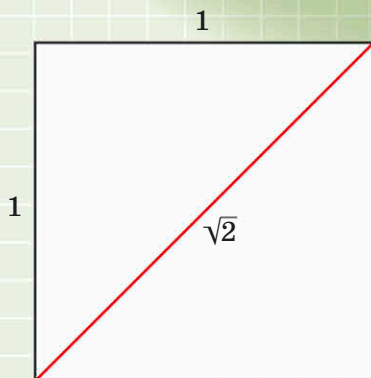


Рис. 1.1

ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Изучая математику, вы осваиваете одно из её основных понятий — число. Именно это понятие самым непосредственным образом связывает математику с жизнью. В XXI в. число фактически стало базовым понятием всей нашей цивилизации, которую не случайно сегодня называют цифровой. Компьютерные технологии, в основе которых лежит число, цифра, определяют сегодня качество нашей жизни.

РАЦИОНАЛЬНЫЕ И ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА Начиная изучение математики, вы познакомились с **натуральными числами**, которые используются для определения количества отдельных предметов. Они имеют специальное обозначение — собственное имя — N (от латинского *natura* — природа).

Однако для решения практических задач, связанных с делением целого на части (в частности, задач измерения), натуральных чисел оказалось недостаточно — появились дроби.

Далее вы познакомились с отрицательными числами. Натуральные числа, противоположные им отрицательные числа и число 0 составляют **множество целых чисел**, а целые и дробные числа (положительные и отрицательные) — **множество рациональных чисел**. Эти множества также имеют свои обозначения — Z и Q соответственно. Обозначение Z происходит, скорее всего, от немецкого слова *Zahl* — число. А Q — это первая буква французского слова *quotient* — частное, а всякое рациональное число, как вам уже известно, можно представить в виде отношения (т.е. частного) двух целых чисел.

Примерно две с половиной тысячи лет назад греческие математики открыли числа, которые нельзя представить в виде отношения целых чисел. Это, например, знаменитое число $\sqrt{2}$, выражающее длину диагонали квадрата со стороной 1 (**рис. 1.1**). Это открытие послужило основанием для изобретения **иррациональных чисел**. Рациональные и иррациональные числа вместе составляют **множество действительных чисел**.



Рациональные числа — это такие действительные числа, которые можно представить в виде отношения $\frac{p}{q}$, где p и q — целые числа, а иррациональные числа — это действительные числа, которые в таком виде представить нельзя.

Множество действительных чисел принято обозначать буквой R — от французского *réel* (по-английски *real*) — реальный, настоящий, действительный.

Обозначения числовых множеств, с которыми вы познакомились, приведены в таблице.

Множество	Обозначение
натуральных чисел	N
целых чисел	Z
рациональных чисел	Q
действительных чисел	R

Используя введённые обозначения числовых множеств, можно кратко записывать часто употребляемые выражения, связанные с этими множествами и их элементами.

Запись $a \in A$ означает, что a принадлежит множеству A . Например, запись $3 \in Z$ можно прочитать так: «Число 3 принадлежит множеству целых чисел», или проще: «3 — целое число».

А запись $\sqrt{3} \notin Q$ означает: « $\sqrt{3}$ не принадлежит множеству рациональных чисел», или иначе: « $\sqrt{3}$ не является рациональным числом».

ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА И КООРДИНАТНАЯ ПРЯМАЯ

Каждое рациональное число можно изобразить геометрически — точкой на координатной прямой. Данное число при этом называют координатой соответствующей точки. Если представить себе, что все рациональные числа нанесены на координатную прямую, то некоторые точки прямой (а на самом деле очень многие) окажутся свободными, не имеющими координат.

Отложим, например, от точки O отрезок OA — диагональ квадрата со стороной 1 (рис. 1.2). Так как длина этого отрезка не выражается рациональным числом, то точки A , координата которой равна $\sqrt{2}$, не будет среди отмеченных.

А действительных чисел, т.е. рациональных и иррациональных вместе, оказалось уже достаточно, чтобы заполнить всю координатную прямую.

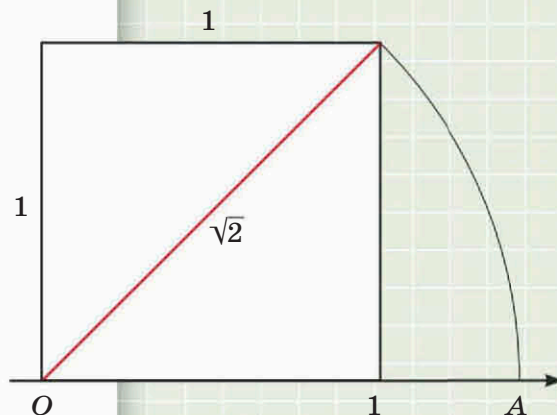


Рис. 1.2

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

● Какие числа образуют множество действительных чисел? Приведите примеры действительных чисел.

● Прочитайте утверждения: $-2 \notin N$, $-2 \in Z$, $\sqrt{15} \in R$, $-4\pi \notin Q$.

● Покажите на координатной прямой примерное расположение чисел: $\frac{7}{12}$, $\sqrt{28}$, $-\pi$.

Каждой точке координатной прямой соответствует некоторое действительное число. И наоборот: каждое действительное число можно изобразить точкой на координатной прямой.

Говорят, что между множеством действительных чисел и множеством точек координатной прямой существует взаимно однозначное соответствие.

Изобретение действительных чисел создало в математике два равноправных языка — алгебраический и геометрический. Можно сказать, например, «точка 7», имея в виду при этом точку с координатой 7.

УПРАЖНЕНИЯ

РАЦИОНАЛЬНЫЕ И ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

1 Выберите из чисел -1 ; 0 ; $\sqrt{17}$; $-\sqrt{16}$; $1,79$; -2π ; 86 ; 120 ; $-\frac{1}{12}$; $\sqrt{5} - \sqrt{3}$; $0,002$:

- а) натуральные числа; г) отрицательные рациональные числа;
 б) целые числа; д) иррациональные числа;
 в) рациональные числа; е) положительные действительные числа.

2 Определите, верно или неверно утверждение, объясните свой ответ:

- а) всякое натуральное число является целым;
 б) всякое целое число является натуральным;
 в) всякое целое число является рациональным;
 г) всякое рациональное число является действительным;
 д) всякое действительное число является рациональным;
 е) всякое иррациональное число является действительным.

3 Приведите пример числа, которое:

- а) является рациональным, но не является целым;
 б) является целым, но не является натуральным;
 в) является действительным, но не является рациональным;
 г) является действительным, но не является иррациональным.

4 Запишите с помощью символов следующие утверждения:

- 1) 10 — целое число; 4) $0,35$ не является целым числом;
 2) -18 — действительное число; 5) $\sqrt{6} + \sqrt{10}$ — иррациональное число;
 3) $\frac{4}{11}$ — рациональное число; 6) -1 не является натуральным числом.

5 Найдите неизвестные стороны прямоугольного треугольника и для каждой из них выясните, рациональным или иррациональным числом выражается её длина (рис. 1.3, а–г).

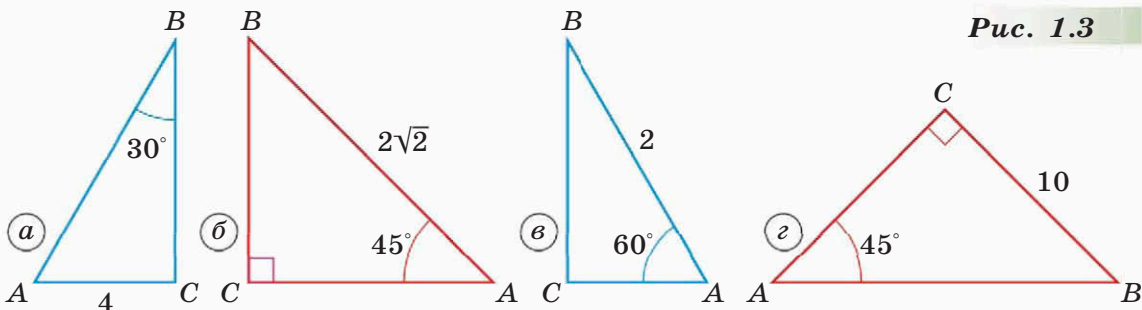


Рис. 1.3

6 Определите, рациональным или иррациональным числом является значение выражения:

- а) $(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 1)$; б) $(3 - 2\sqrt{3})^2$; в) $(2\sqrt{10})^2$; г) $3\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$; д) $\frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{18}}{6\sqrt{6}}$.

7 Определите, рациональным или иррациональным числом является значение выражения:

- а) $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7} - \sqrt{5}} - \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7} + \sqrt{5}}$; б) $\frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} - \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$; в) $\frac{\sqrt{8} - 3}{2\sqrt{2} + 3} + \frac{\sqrt{8} + 3}{2\sqrt{2} - 3}$; г) $2 - \sqrt{3} + \frac{1 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}$.

8

Определите знак числа:

- а) $2\sqrt{5} - 3$; б) $2 - \sqrt{7}$; в) $3\sqrt{3} - 5$; г) $4 - 2\sqrt{3}$; д) $2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}$.

9

Сравните:

- а) $\sqrt{3}$ и $\sqrt{5}$; $-\sqrt{3}$ и $-\sqrt{5}$; в) $1 - \sqrt{3}$ и $1 - \sqrt{5}$; $\frac{1}{1 - \sqrt{3}}$ и $\frac{1}{1 - \sqrt{5}}$;
 б) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $\frac{1}{\sqrt{5}}$; $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $-\frac{1}{\sqrt{5}}$; г) $\sqrt{3} - 1$ и $\sqrt{5} - 1$; $\frac{1}{\sqrt{3} - 1}$ и $\frac{1}{\sqrt{5} - 1}$.

10

1) Какое из равенств верно: $|2 - \sqrt{5}| = 2 - \sqrt{5}$ или $|2 - \sqrt{5}| = \sqrt{5} - 2$?2) Запишите без знака модуля: а) $|3 - \sqrt{11}|$; б) $|\sqrt{17} - 4|$; в) $|2\pi - 6|$; г) $|\frac{\pi}{2} - 2|$.3) Упростите, используя равенство $\sqrt{a^2} = |a|$:

- а) $\sqrt{(\sqrt{10} - \sqrt{7})^2}$; б) $\sqrt{(\sqrt{6} - \sqrt{10})^2}$; в) $\sqrt{(2 - \sqrt{7})^2}$; г) $\sqrt{(\sqrt{26} - 5)^2}$.

ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА И КООРДИНАТНАЯ ПРЯМАЯ

11

Определите, какое из утверждений верно, а какое нет:

- а) 1) Каждому рациональному числу соответствует точка координатной прямой.
 2) Каждой точке координатной прямой соответствует рациональное число.
 б) 1) Каждому иррациональному числу соответствует точка координатной прямой.
 2) Каждой точке координатной прямой соответствует иррациональное число.
 в) 1) Каждому действительному числу соответствует точка координатной прямой.
 2) Каждой точке координатной прямой соответствует действительное число.

12

Найдите какое-нибудь рациональное и какое-нибудь иррациональное число, принадлежащее заданному промежутку; ответ запишите с помощью знака $\in$:

- а) $[1; 4]$; б) $(-2; 0)$; в) $[3; +\infty)$; г) $(-\infty; -10)$.

13

Используя циркуль и линейку, отметьте на координатной прямой числа:

 $\sqrt{2}$ и $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2} - 1$ и $1 - \sqrt{2}$; $2\sqrt{2}$.*Подсказка.* Используйте способ построения точки с координатой $\sqrt{2}$, показанный в тексте пункта.

14

Разберите, как решена задача: «Изобразите на координатной прямой множество точек, координаты которых удовлетворяют условию $|x - 2| \leq 5$, и запишите его с помощью обозначений промежутков».

Решение. Переведём утверждение, записанное алгебраически, на геометрический язык: запись $|x - 2| \leq 5$ означает, что расстояние от точки x до точки 2 не превосходит 5. Множество таких точек — это отрезок $[-3; 7]$ (рис. 1.4).

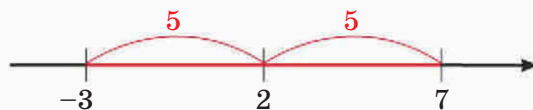


Рис. 1.4

Рассуждая таким же способом, изобразите на координатной прямой и запишите с помощью промежутков множество точек прямой, удовлетворяющих условию:

- а) $|x| \leq 4$; $|x| \geq 4$; б) $|x - 1| \leq 3$; $|x - 1| \geq 3$; в) $|x + 4| \leq 2$; $|x + 4| \geq 2$.

1.2

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Как возникают бесконечные десятичные дроби.
- Как связаны между собой действительные числа и бесконечные десятичные дроби.
- Как сравнивают бесконечные десятичные дроби.

Вся практическая деятельность человека, связанная с измерениями, обеспечивается действительными числами. Именно они используются для измерения реальных, прежде всего геометрических и физических величин — длины, площади, объёма, скорости, массы, плотности и т.д. Благодаря введению иррациональных чисел можно говорить не только о точной длине любого отрезка, но и о точной массе любого тела, точной скорости движения и т.п.

Ещё недавно действительные числа называли вещественными, подчёркивая их связь с измерением величин. Название же «действительные» связано с тем, что действительные числа в математике противопоставляются так называемым мнимым числам, о которых вы узнаете в старших классах.

«УНИВЕРСАЛЬНОЕ ИМЯ» ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Универсальным обозначением для всех рациональных чисел является дробь $\frac{p}{q}$, где p и q — целые числа. А как дать универсальное имя действительным числам? Изобрести здесь общее правило не так уж просто: что объединяет, например, символы $\frac{2}{3}$, $\sqrt{2}$, π ? Однако общий способ представления действительных чисел существует, и связан он с десятичной записью чисел.

БЕСКОНЕЧНЫЕ ДЕСЯТИЧНЫЕ ДРОБИ Вы знаете, что некоторые обыкновенные дроби могут быть записаны в виде десятичных дробей. Например:

$$\frac{5}{8} = 0,625; \quad \frac{9}{25} = 0,36; \quad \frac{19}{40} = 0,475.$$

А есть дроби, которые нельзя представить в виде десятичных, например $\frac{7}{11}$. Если начать делить её числитель на знаменатель, то этот процесс никогда не закончится (попробуйте выполнить это самостоятельно). В частном возникнет запись $0,63636363\dots$.

Многоточие здесь означает, что, продолжая деление, можно в принципе узнать любую цифру частного. Такие записи, по очевидной аналогии, называют **бесконечными десятичными дробями**. Иными словами, число $\frac{7}{11}$ записывается в виде бесконечной десятичной дроби: $\frac{7}{11} = 0,63636363\dots$.

Вообще, всякое дробное число можно представить либо в виде конечной десятичной дроби (так мы теперь будем говорить для противопоставления), либо в виде бесконечной десятичной дроби. Однако к любой конечной десятичной дроби и к любому целому числу можно приписать справа «хвост» из бесконечной последовательности нулей. Например:

$$-3,27 = -3,270000\dots; \quad 86 = 86,00000\dots$$

Поэтому можно считать, что *любое рациональное число изображается бесконечной десятичной дробью*.

Так же обстоит дело и с иррациональными числами: *всякое иррациональное число изображается бесконечной десятичной дробью*.

Возьмём, например, число $\sqrt{2}$. Как начинается бесконечная десятичная дробь, равная этому числу? Воспользуемся калькулятором, на котором есть клавиша $\sqrt{}$. На экране появится запись: $1,4142135$. Используя её, выпишем приближённые значения $\sqrt{2}$ с недостатком, последовательно увеличивая число знаков. Получим цепочку приближённых равенств, которая приведена в таблице на с. 13.

Представьте мысленно эти приближённые значения на координатной прямой. Вы получите точки, которые всё ближе «подкрадываются» слева к точке $\sqrt{2}$, но ни одна из них не попадёт ровно в неё. Иначе число $\sqrt{2}$ оказалось бы рациональным. Процесс нахождения приближённых значений этого числа может продолжаться бесконечно, и мы будем получать всё новые цифры бесконечной десятичной дроби, которую и считают другим, новым именем для $\sqrt{2}$. Более мощный калькулятор мог бы дать, например, такой результат:

$$\sqrt{2} = 1,414213562373... .$$

Подведём итог сказанному:

 любое действительное число может быть представлено в виде бесконечной десятичной дроби. Верно и обратное: всякая бесконечная десятичная дробь представляет некоторое действительное число.

Зная это, вы можете сами сконструировать сколько угодно действительных чисел. Например:

$$0,1234567..., 2,3434444..., -4,2525252525... .$$

Бесконечная десятичная дробь как математический объект имеет один существенный недостаток: её нельзя выписать полностью. Поэтому, чтобы её считать заданной, надо знать, как именно определяются десятичные знаки, обозначенные многоточием.

СРАВНЕНИЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ Запись действительных чисел в виде бесконечных десятичных дробей позволяет сравнивать их поразрядно. Например:

$$2,037037037... < 2,037037039... .$$

Так сравнивают положительные числа. Действительные числа любого знака сравнивают по тем же правилам, что и рациональные числа: из двух различных действительных чисел меньшим считается то, которое на координатной прямой расположено левее. Отсюда: всякое отрицательное число меньше нуля и меньше любого положительного числа; из двух отрицательных чисел меньше то, модуль которого больше.



Распространение способа поразрядного сравнения чисел на бесконечные десятичные дроби (как и ряд других факторов) приводит к тому, что из рассмотрения исключаются дроби, в которых, начиная с некоторого разряда, содержится только цифра 9 (например, такие: $0,199999...$). С чем это связано, вы можете прочитать в пункте «Периодические и непериодические бесконечные десятичные дроби» («Узнайте больше») в конце этой главы.

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &\approx 1 \\ \sqrt{2} &\approx 1,4 \\ \sqrt{2} &\approx 1,41 \\ \sqrt{2} &\approx 1,414 \\ \sqrt{2} &\approx 1,4142 \\ \sqrt{2} &\approx 1,41421 \\ \sqrt{2} &\approx 1,414213 \\ \sqrt{2} &\approx 1,4142135\end{aligned}$$

 Число знаков $\sqrt{2}$, которые выдаёт калькулятор, зависит от его возможностей.

Например, при использовании калькулятора, встроенного в компьютер, можно получить более «полное» имя числа $\sqrt{2}$, чем приведено в тексте: $\sqrt{2} = 1,4142135623730950488016887242097... .$

В наше время с помощью компьютеров для числа $\sqrt{2}$ вычислено более 200 миллиардов десятичных знаков после запятой. Среди математических констант только π вычислено более точно: подсчитаны десятки триллионов десятичных знаков этого числа.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

-  Всякое ли дробное число можно представить в виде конечной десятичной дроби? в виде бесконечной десятичной дроби? Приведите свои примеры.
-  В чём состоит универсальный способ записи рациональных чисел? действительных чисел?
-  Запишите первые 4 десятичных знака бесконечной десятичной дроби, представляющей число $\frac{11}{12}$; 39 ; $\sqrt{2}$; π .

УПРАЖНЕНИЯ

БЕСКОНЕЧНЫЕ ДЕСЯТИЧНЫЕ ДРОБИ

15

Как начинается бесконечная десятичная дробь, представляющая данное число? (Приведите четыре знака после запятой; воспользуйтесь калькулятором.)

а) $\frac{11}{12}$; $\frac{34}{23}$; $\frac{5}{11}$; $\frac{4}{15}$;

б) $\sqrt{137}$; $\sqrt{22,5}$; $\sqrt{0,5}$; $\sqrt{243}$;

в) 2π ; 3π ; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{4}$.

16

Представьте бесконечной десятичной дробью все правильные дроби со знаменателем 9. Какую закономерность вы заметили?

17

Округлите до сотых и до тысячных число:

а) 2,3452;

д) 7,171771777...;

б) 0,0817;

е) 0,35791011...;

в) 15,1919...;

ж) 0,333333...;

г) 4,122122...;

з) 0,626262... .

18

Решите уравнение и укажите, рациональными или иррациональными являются его корни. Найдите приближённые значения иррациональных корней с одним знаком после запятой:

а) $25x^2 = 4$;

в) $16x^2 - 1 = 0$;

д) $0,6x^2 = 4,8$;

б) $10x^2 = 5$;

г) $9x^2 - 1 = 26$;

е) $0,96 = 1,5x^2$.

19

В окружность с центром O и радиусом, равным 1, вписан треугольник (рис 1.5, а, б).

Найдите длину каждой стороны треугольника. Если длина стороны выражается иррациональным числом, найдите её приближённое значение с одним знаком после запятой.

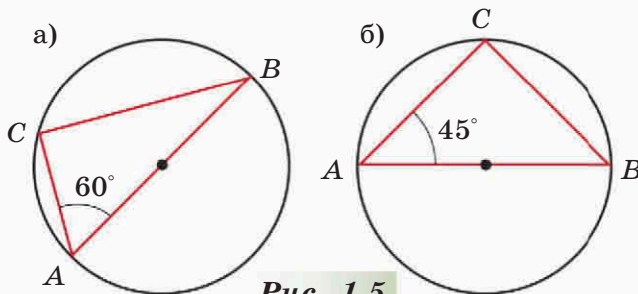


Рис. 1.5

20

Выпишите десять знаков после запятой бесконечной десятичной дроби, представляющей число $\frac{11}{27}$. С какого знака после запятой начинают повторяться цифры в частном? Как вы думаете, какая цифра стоит на 12-м месте после запятой? на 16-м? на 20-м?

21

Запишите какую-нибудь правильную обыкновенную дробь, которая не обращается в конечную десятичную дробь. Выполните для неё такое же задание, как в упражнении 20.

Самое раннее известное приближение числа π относится к 1900 г. до н.э., и оно выражается обыкновенной дробью: $\frac{25}{8}$. Вот ещё несколько известных приближений π обыкновенными дробями:

$\frac{22}{7}$ — Архимед (III в. до н.э.), древнегреческий математик, физик и инженер;

$\frac{377}{120}$ — Ариабхата (V в. н.э.), индийский астроном и математик;

$\frac{355}{113}$ — Цзу Чунчжи (V в. н.э.) — китайский астроном и математик.

СРАВНЕНИЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

22

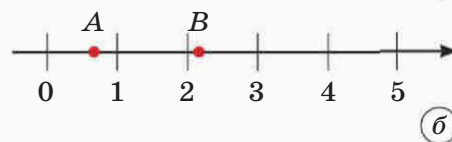
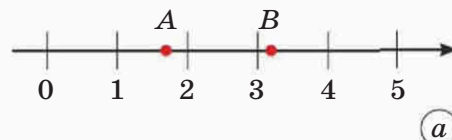
Принадлежит ли отрезку $[1,57; 1,58]$ число:

- а) 1,570001; б) 1,5801; в)
- $1\frac{4}{7}$
- ; г)
- $\sqrt{3}$
- ; д)
- $\sqrt{2,5}$
- ; е)
- $\sqrt{2,48}$
- ; ж)
- $\frac{\pi}{2}$
- ?

23

Сравните числа:

- а) 0,53247... и 0,53147...; д) $\frac{2}{9}$ и 0,23;
 б) -1,15 и -1,1485...; е) $\sqrt{40}$ и 6,4;
 в) 0,121212... и 0,12; ж) $\frac{3}{7}$ и 0,428;
 г) 0,5 и 0,494949...; з) $1\frac{5}{7}$ и $\sqrt{3}$.



24

Определите, какое число соответствует точке А и какое — точке В, если этими точками отмечены два из следующих чисел:

- а) 1,5;
- $\sqrt{3}$
- ;
- $\sqrt{5}$
- ;
- $\sqrt{10}$
- (рис. 1.6, а);

- б)
- $\frac{\pi}{2}$
- ;
- $\frac{2\pi}{3}$
- ;
- $\frac{3}{2}$
- ;
- $\frac{2}{3}$
- (рис. 1.6, б).

Рис. 1.6

25

На координатной прямой (рис. 1.7) точками А, В, С и D отмечены числа $\frac{4}{9}$; 0,409; -0,409; -0,4905. Определите координаты каждой точки.

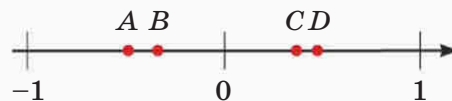


Рис. 1.7

26

Найдите наименьшее из следующих чисел: а) 0,7; $\frac{7}{9}$; $\frac{9}{7}$; $\frac{4}{5}$; б) 0,8; $\frac{8}{9}$; $\frac{9}{8}$; $\frac{3}{5}$.

27

а) Расположите в порядке возрастания числа: $\frac{1}{8}$; 0,12; 0,121...; 0,1205... .б) Расположите в порядке убывания числа: $\frac{5}{8}$; 0,64; 0,601...; 0,6001... .

СВОЙСТВА ЧИСЛОВЫХ МНОЖЕСТВ

28

Докажите, что сумма, разность, произведение и частное двух рациональных чисел (кроме случая деления на нуль) есть число рациональное.

Образец. Докажем это утверждение для суммы. Возьмём рациональные числа $\frac{p}{q}$ и $\frac{r}{s}$ (p, r, q, s — целые числа, $q \neq 0, s \neq 0$). Найдём их сумму: $\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{ps + rq}{qs}$. Числа $ps + rq$ и qs — целые числа (объясните почему). Следовательно, их частное $\frac{ps + rq}{qs}$ есть рациональное число.

29

Докажите, что сумма, разность, произведение и частное рационального числа a , при $a \neq 0$ и иррационального числа α есть число иррациональное.

Подсказка. Примените способ рассуждения от противного и воспользуйтесь результатами предыдущего упражнения.

30

Приведите примеры, показывающие, что сумма, разность, произведение и частное двух иррациональных чисел могут быть как иррациональным, так и рациональным числом.

1.3

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Какими свойствами обладают числовые неравенства.
- Какие из свойств неравенств аналогичны свойствам равенств и какие отличаются от них.

В жизни вы часто встречаетесь с выражениями «не меньше» и «не больше» и прекрасно понимаете их. Например, если кто-то решил получить за экзамены не меньше двух пятёрок, то его планы сбудутся, если среди экзаменационных отметок у него будет две, три или четыре пятёрки. Его намерения не будут выполнены, если он получит меньше двух пятёрок — одну или ни одной. В этом и состоит обычный смысл выражения «не меньше».

ОБЩИЕ СВОЙСТВА НЕРАВЕНСТВ

Уже в начальной школе вы использовали знаки неравенств $>$ и $<$. Знаете вы и знаки $\leq$ и $\geq$. Вы записываете неравенства при сравнении чисел и величин, для обозначения числовых промежутков (например, $-1 \leq x \leq 3$). Однако неравенства используют гораздо шире. Они являются важной частью математического аппарата.

СТРОГИЕ И НЕСТРОГИЕ НЕРАВЕНСТВА Запись $a < b$ означает то же, что и $b > a$: прочитайте справа налево первое равенство — получите второе. Знаки $\leq$ и $\geq$ означают отрицание отношений «больше» и «меньше» соответственно. Словосочетание «меньше или равно» означает в точности то же, что и «не больше» (отрицание «больше»), а «больше или равно» — то же, что и «не меньше» (отрицание «меньше»). Таким образом:

- неравенство $a \leq b$ верно, если $a < b$ или $a = b$;
- неравенство $a \geq b$ верно, если $a > b$ или $a = b$.

Так, верными являются неравенства $3 \leq 7$, $3 \leq 3$, а неравенство $3 \leq 2$ неверное.

Знаки $<$ и $>$ называются знаками **строгого неравенства**, а знаки $\leq$ и $\geq$ — знаками **нестрогого неравенства**.

СВОЙСТВА НЕРАВЕНСТВ Свойства неравенств похожи на свойства равенств, но есть и различия.

Равенства	Неравенства
1) если $a = b$ и $b = c$, то $a = c$ — свойство транзитивности ;	1) если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$ — свойство транзитивности (рис. 1.8);
2) если $a = b$ и c — любое число, то $a + c = b + c$. Прибавив к равным числам одно и то же число, мы опять получим равные числа.	2) если $a < b$ и c — любое число, то $a + c < b + c$. К обеим частям неравенства можно прибавить (или вычесть из них) одно и то же число (рис. 1.9).

Рис. 1.8

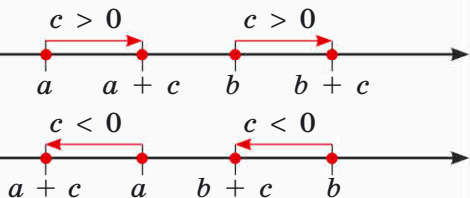


Рис. 1.9

В формулировке второго свойства неравенств слово «можно» означает, что при таком преобразовании верное неравенство остаётся верным, а неверное — неверным. Например, неравенства $3 < 5$ и $3 - 6 < 5 - 6$ оба верные, а $3 > 5$ и $3 - 6 > 5 - 6$ оба неверные.

Из этого свойства вытекает полезное *следствие*:



любое слагаемое можно перенести из одной части неравенства в другую, поменяв знак слагаемого на противоположный.

Рассмотрим ещё одно свойство, верное для числовых равенств: умножив равные числа на одно и то же число,

мы опять получим равные числа, т.е. если $a = b$ и c — любое число, то $ac = bc$.

Однако для неравенств это не всегда так. Возьмём неравенство $-3 < 4$. Умножим обе его части на 2, а затем на -2 . В первом случае неравенство $-3 \cdot 2 < 4 \cdot 2$ будет верным (рис. 1.10, а). Во втором случае верным будет неравенство $-3 \cdot (-2) > 4 \cdot (-2)$ (рис. 1.10, б). Вообще, результат зависит от знака множителя. Получаем ещё одно, третье свойство неравенств.

Обе части неравенства можно умножить (или разделить) на одно и то же положительное число, оставив знак неравенства без изменения, и на одно и то же отрицательное число, изменив при этом знак неравенства на противоположный:

- если $a < b$ и $c > 0$, то $ac < bc$;
- если $a < b$ и $c < 0$, то $ac > bc$.

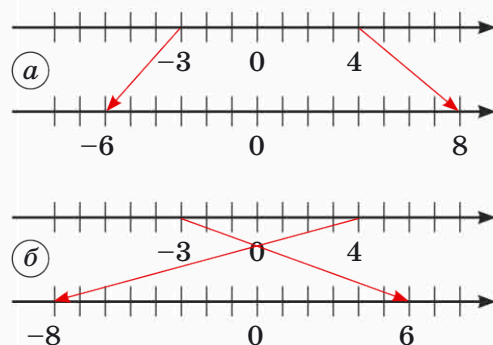


Рис. 1.10

ПОЧЛЕННОЕ СЛОЖЕНИЕ И УМНОЖЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ Вы знаете, что равенства можно почленно складывать и перемножать: если $a = b$ и $c = d$, то $a + c = b + d$ и $ac = bd$. Так же и для неравенств одного знака.

Если сложить почленно неравенства одного знака, то получим неравенство того же знака: если $a < b$ и $c < d$, то $a + c < b + d$.

Действительно, каждое слагаемое первой суммы меньше соответствующего слагаемого второй, поэтому первая сумма меньше второй.

Неравенства одного знака с положительными членами можно почленно перемножать: если $a < b$ и $c < d$ и a, b, c и d больше нуля, то $ac < bd$.

Так, перемножив почленно неравенства $5 < 10$ и $2 < 3$, получим неравенство того же знака: $5 \cdot 2 < 10 \cdot 3$, $10 < 30$. Рисунок на с. 19 иллюстрирует это свойство геометрически (рис. 1.12).

Неравенства одного знака с отрицательными членами перемножать нельзя, так как результат этого действия неопределённый. Убедитесь в этом, перемножив, например, неравенства $-2 < 3$ и $-4 < 2$, а затем неравенства $-2 < 5$ и $-4 < 6$.

Все рассмотренные свойства были сформулированы для неравенств со знаком $<$. Понятно, что аналогичные свойства справедливы и для других знаков неравенств.

Термин **транзитивность** (см. с. 16) происходит от французского слова *transitivité* — переходность. Этим свойством обладают и многие другие известные вам отношения. Например, параллельность прямых (если $a \parallel b$ и $b \parallel c$, то $a \parallel c$); делимость натуральных чисел (если a делится на b и b делится на c , то a делится на c); включение подмножества (если $A \subset B$, а $B \subset C$, то $A \subset C$).

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

● Запишите на математическом языке утверждение « a не больше b » и объясните его смысл. Верно ли неравенство: $-10 \leq 3$, $10 \leq 10$; $5 \geq -7$; $-7 \geq 5$?

● Запишите с помощью букв рассмотренные в пункте свойства неравенств со знаками $>$, $\geq$, $\leq$; проиллюстрируйте каждое из них числовым примером.

УПРАЖНЕНИЯ

ПРИМЕНЯЕМ СВОЙСТВА НЕРАВЕНСТВ

Знак	Читается
$<$	меньше
$>$	больше
$\leq$	меньше или равно (не больше)
$\geq$	больше или равно (не меньше)

31

Пользуясь рисунком (рис. 1.11), сравните указанную пару чисел и ответ запишите с помощью разных знаков неравенства:

а) a и c ; б) d и b ; в) a и d ; г) c и b .



Рис. 1.11

32

а) Известно, что $a < c$, $b > c$, $d > b$. Сравните a и b , a и d , c и d .

б) Известно, что $a > 0$, $b < 0$, $a < c$. Сравните a и b , b и c , c и 0 .

Подсказка. Для наглядности воспользуйтесь координатной прямой.

33

а) Можно ли сравнить числа a и c , если:

1) $a > b$, $b = c$; 2) $a > b$, $b \leq c$; 3) $a \geq b$, $b \geq c$; 4) $a < b$, $c \geq b$; 5) $a \leq b$, $b < c$?

б) Можно ли сравнить числа a и d , если $c \leq a \leq b$ и:

1) $b < d$; 2) $c < d < b$; 3) $d < c$; 4) $d \leq b$?

в) Какой вывод можно сделать о соотношении чисел a и b , если выполняются сразу два неравенства: $a \geq b$ и $a \leq b$?

Расположите в порядке возрастания числа; ответ запишите в виде цепочки неравенств (№ 34–35).

34

а) 5,232; -1,232; 5,2302; -0,2322; -0,232; в) 0,2; 0,3; 0,4; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$;

б) 0,41357...; 0,42; 0,042; 0,41333...; г) -0,7; -0,77; -0,78; -0,777... .

35

а) 7; $\sqrt{50}$; $4\sqrt{3}$; б) $2\sqrt{5}$; $3\sqrt{3}$; 3,5; 3,555...; в) $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{\pi}$; г) 9; $4\sqrt{5}$; 3π .

36

Не пользуясь калькулятором, расположите числа в порядке возрастания и объясните, как вы рассуждали:

а) $\frac{2}{3}$; $\sqrt{0,5}$; 0,66; 0,666; $\sqrt{0,3}$; б) $\frac{1}{6}$; $\sqrt{0,02}$; $\sqrt{0,046}$; 0,16; 0,166.

37

Известно, что $a > b$. Какое неравенство получится, если к обеим его частям прибавить 8; -25; $b + c$; $-b$; вычесть из его обеих частей эти же числа?

38

Известно, что $a + 6 \geq b + 6$. Объясните, почему верно неравенство:

$a \geq b$; $a + 8 \geq b + 8$; $a - 10 \geq b - 10$; $a - b \geq 0$.

39

Дано неравенство $a + 3 - b < p - q - 5$. С помощью переноса слагаемых из одной части в другую получите неравенство, в котором: а) все буквы собраны в левой части, числа — в правой; б) нет слагаемых со знаком «минус».

40

Известно, что $a < b$. Запишите верное неравенство, которое получится, если обе части этого неравенства:

а) умножить на 30; на -1; на $\frac{1}{3}$; б) разделить на 5; на -1; на 0,5.

41

Известно, что $\frac{5}{6}a < \frac{5}{6}b$. Верно ли неравенство:

а) $5a < 5b$;

в) $-a < -b$;

д) $\frac{6}{5}a > \frac{6}{5}b$;

б) $a > b$;

г) $-2a > -2b$;

е) $3 - a > 3 - b$?

42

Сравните число a с нулём, если известно, что:

а) $a + 7 < b + 7$ и $b < -1$;

в) $-6a < -6b$ и $b \geq 0$;

б) $\frac{1}{3}a > \frac{1}{3}b$ и $b > 50$;

г) $2 - a < 2 - b$ и $b \geq 1$.

СЛОЖЕНИЕ И УМНОЖЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ. ОЦЕНКА

43

а) Какие из неравенств: $a + b > 20$; $a + b > 30$; $a + b > 18$ — следуют из условия $a > 5$ и $b > 15$?

б) Какие из неравенств: $ab > 150$; $ab > 100$; $ab > 200$ — следуют из условия $a > 10$ и $b > 15$?

44

Не вычисляя значения суммы, сравните:

а) $0,7541 + 0,521$ и 1 ;

б) $299 + 268 + 371$ и 1000 ;

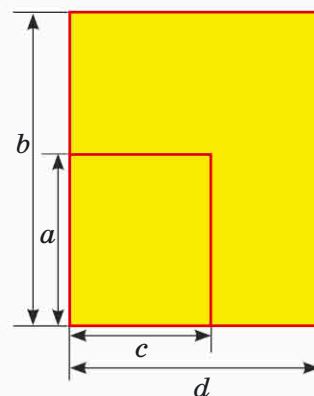
в) $0,2501 + 0,252 + 0,26 + 0,25$ и 1 .

Образец. Сравним $2,38 + 2,39 + 2,46 + 2,5$ и 10 :

$$2,38 + 2,39 + 2,46 + 2,5 < 2,5 + 2,5 + 2,5 + 2,5 = 10.$$

Значит, $2,38 + 2,39 + 2,46 + 2,5 < 10$.

Рис. 1.12



$$a < b, c < d$$

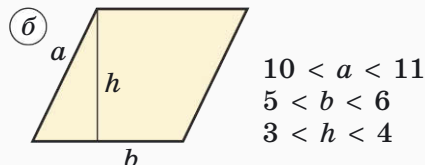
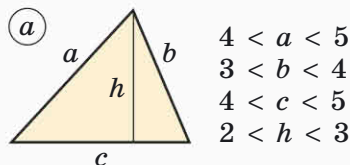
$$S_1 = ac, S_2 = bd$$

$$S_1 < S_2$$

Отсюда:
 $ac < bd$

45

Оцените площадь и периметр треугольника и параллелограмма, изображённых на рисунке, если известны границы сторон и одной из высот в каждой фигуре:



МАТЕМАТИКА ВОКРУГ НАС (№ 46–49)

46

Николай договорился о встрече у метро в 10 ч. На дорогу от дома до метро у Николая уходит от 10 до 15 мин, а на поездку в метро до места встречи — от 18 до 20 мин. Успеет ли он к назначенному времени, если выйдет из дома:

а) в 9 ч 20 мин; б) в 9 ч 40 мин; в) в 9 ч 30 мин?

47

Пятитомную энциклопедию и десяти томное собрание сочинений хотят разместить на книжной полке длиной 80 см. Возможно ли это, если толщина тома энциклопедии a см и толщина тома собрания сочинений b см находятся в границах: $6,5 < a < 7,4$; $2,9 < b < 4,3$?

48

Оцените площадь и периметр прямоугольного треугольника с катетами $\sqrt{3}$ см и $\sqrt{2}$ см. (Ответ дайте в десятичных дробях с одним знаком после запятой.)

49

а) Докажите, что периметр выпуклого четырёхугольника больше суммы длин его диагоналей.

б) Докажите, что периметр выпуклого пятиугольника больше полусуммы длин его диагоналей.

1.4

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Что называют решением неравенства с одной переменной.
- Что означают термины «равносильные уравнения», «равносильные неравенства».
- Как решают линейные неравенства.

Неравенства, как и уравнения, буквально пронизывают каждую область математической науки. Вы сами давно могли убедиться в том, что многие теоремы, например геометрии, выражаются на языке неравенств. Например: «перпендикуляр меньше наклонной, проведённой из одной и той же точки к данной прямой», «каковы бы ни были три точки на плоскости, расстояние между любыми двумя из этих точек *не больше* суммы расстояний от них до третьей точки», «сторона треугольника *меньше* суммы двух других сторон», «против *большого* угла треугольника лежит *большая* сторона».

РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ

В хореографическом коллективе о каждом юноше и девушке известно, симпатичны ли они друг другу; требуется составить максимальное число танцевальных пар с взаимной симпатией. Вода поступает через систему труб с разной пропускной способностью из одного входа к общему выходу; надо определить, сколько должно протекать воды через каждую трубу, чтобы на выходе получился максимальный поток. Решение такого рода задач связано с применением неравенств. Конечно, умений, которые вы получите при изучении этого пункта, недостаточно, чтобы решать подобные проблемы. Но они составляют ту базу, которой сначала необходимо овладеть.

КАК РЕШАЮТ НЕРАВЕНСТВА С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ Рассмотрим неравенство с переменной x : $3x + 2 > 5$. При различных значениях x оно обращается в верное или неверное числовое неравенство. Например, при $x = 4$ получаем верное неравенство $3 \cdot 4 + 2 > 5$, а при $x = -1$ — неверное: $3 \cdot (-1) + 2 > 5$. Число 4 является **решением неравенства** $3x + 2 > 5$, а число -1 его решением не является. Вообще, у данного неравенства бесконечно много решений. Подберите какие-нибудь из них.



Решить неравенство с одной переменной — это значит найти все значения переменной, при которых оно верно, или убедиться, что таких значений нет.

Неравенства решают почти так же, как и уравнения. Найдём значения переменной x , при которых значение выражения $3x + 2$ равно 5, больше 5 и меньше 5. Иными словами, решим уравнение $3x + 2 = 5$ и неравенства $3x + 2 > 5$ и $3x + 2 < 5$.

Переносим слагаемое 2 с противоположным знаком в правую часть и упрощаем её	$3x + 2 = 5$ $3x = 3$	$3x + 2 > 5$ $3x > 3$	$3x + 2 < 5$ $3x < 3$
Делим обе части уравнения и неравенств на 3 (знаки неравенств оставляем прежними, так как делим на положительное число)	$x = 1$	$x > 1$ или (1; +∞)	$x < 1$ или (−∞; 1)

Число 1 — корень уравнения $3x + 2 = 5$ (рис. 1.13). Все числа справа от 1 — это множество решений неравенства $3x + 2 > 5$, а слева — множество решений неравенства $3x + 2 < 5$.

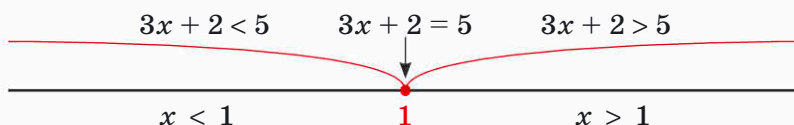


Рис. 1.13

РАВНОСИЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА В процессе решения мы заменяли одно уравнение или неравенство другим, имеющим те же решения. Так, неравенство $3x + 2 > 5$ имеет те же решения, что и неравенство $3x > 5 - 2$. Действительно, пусть при каком-либо значении x первое неравенство верно. Тогда на основании известного свойства неравенств при этом значении x верно и второе неравенство. Если же при каком-то значении x первое неравенство неверно, то неверно и второе. Таким образом, неравенства $3x + 2 > 5$ и $3x > 5 - 2$ верны или неверны при одних и тех же значениях x . Значит, их множества решений совпадают.

Уравнения (неравенства), у которых множества решений совпадают, называют равносильными. Уравнения (неравенства), не имеющие решений, тоже считают равносильными.

Правила, которыми вы пользуетесь при решении уравнений (перенос слагаемого из одной части в другую, умножение обеих частей уравнения на неравное нулю число), позволяют заменять одно уравнение другим, ему равносильным.

Соответствующие правила применяются и при решении неравенств. Они вытекают из свойств неравенств и позволяют выполнять преобразования, приводящие к равносильному неравенству.

Неравенство, равносильное данному, получится, если:

- перенести слагаемое из одной части неравенства в другую, изменив знак этого слагаемого на противоположный;
- умножить (разделить) обе части неравенства на одно и то же положительное число, оставив знак неравенства без изменений;
- умножить (разделить) обе части неравенства на одно и то же отрицательное число, заменив при этом знак неравенства на противоположный.

Пример 1. Решим неравенство $3x - 2(2x - 5) \leq 0$.

$3x - 4x + 10 \leq 0$ — раскрыли скобки
 $-x + 10 \leq 0$ — упростили левую часть
 $-x \leq -10$ — перенесли 10 в правую часть с противоположным знаком
 $x \geq 10$ — умножили обе части неравенства на -1 и поменяли знак неравенства на противоположный

Ответ: $[10; +\infty)$.

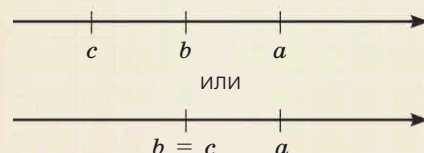
Множество решений неравенства показано на рисунке 1.14.

Для нестрогих неравенств, как и для строгих, выполняется свойство транзитивности:

если $a \geq b$ и $b \geq c$, то $a \geq c$.

Но если одно из исходных неравенств строгое, то заключительное неравенство всегда тоже строгое: если $a > b$ и $b \geq c$, то $a > c$.

Это утверждение можно проиллюстрировать на координатной прямой, чтобы наглядно убедиться в его справедливости.



Равенство — составная часть нестрогого неравенства, поэтому для него ситуация такая же, как в предыдущем случае: если $a > b$ и $b = c$, то $a > c$.

Решив неравенство (Пример 1), мы записали ответ в виде числового промежутка

$[10; +\infty)$.

В то же время ответ часто записывают и в виде простейшего неравенства, множество решений которого очевидно.

В данном случае ответ можно записать так: $x \geq 10$.



Рис. 1.14



Рис. 1.15

Решим неравенство
 $3(4x - 5) < 2(1 + 6x)$.

Решение.

$$3(4x - 5) < 2(1 + 6x);$$

$$12x - 15 < 2 + 12x;$$

$$12x - 12x < 2 + 15;$$

$$0x < 17.$$

Ответ: $(-\infty; +\infty)$.

В последней строке вы могли записать: $0 < 17$. Это верное числовое неравенство. Оно означает, что при любом x верно и исходное неравенство, т.е. множество его решений — множество всех чисел.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

● Какие из чисел -1 ; 0 ; $1,5$; $2,3$ являются решением неравенства $10x - 1 < 12$? Что значит решить неравенство?

● Комментируя каждый шаг, решите неравенство $5 - 4x < x + 14$. Покажите множество решений на координатной прямой и запишите ответ в виде числового промежутка.

● Какие уравнения и какие неравенства называют равносильными? Приведите пример двух равносильных неравенств.

● Имеет ли корни уравнение $0x = 1$? $0x = 0$? Если имеет, то сколько?

● Каково множество решений неравенства $0x < -10$? $0x > -10$? $0x > 0$?

Пример 2. Решим неравенство $\frac{10 - 3x}{4} + \frac{x}{2} > 3$.

Сначала избавимся от дробей, умножив обе части неравенства на 4:

$$10 - 3x + 2x > 12, -x > 2, x < -2.$$

Ответ: $(-\infty; -2)$.

Множество решений неравенства показано на рисунке 1.15.

Пример 3. Решим неравенство $6x - 1 > 9 + 6x$.

$$6x - 6x > 9 + 1; 0x > 10.$$

При любых значениях x неравенство $0x > 10$ обращается в неверное числовое неравенство $0 > 10$. Значит, рассматриваемое неравенство решений не имеет, или, иными словами, множество решений пусто. Ответ можно записать так: «решений нет» или $\emptyset$.

Если бы рассмотренное неравенство содержало знак $<$, т.е. мы решали бы неравенство $6x - 1 < 9 + 6x$, то в результате получили бы неравенство $0x < 10$. При любых значениях x оно обращается в верное неравенство $0 < 10$. Значит, множество решений этого неравенства — множество всех чисел: $(-\infty; +\infty)$.

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЕ И НЕРАВЕНСТВО Каждое из рассмотренных выше неравенств сводилось к неравенству вида $ax > b$ (или с любым другим знаком неравенства). Такое неравенство, как и уравнение $ax = b$, называется **линейным неравенством**. И при решении линейных уравнений, и при решении линейных неравенств в зависимости от коэффициентов a и b возможны различные случаи. Причём здесь есть определённая аналогия. Рассмотрим эти случаи подробнее.

● Уравнение $ax = b$:

1) $a \neq 0, b \neq 0$; уравнение имеет единственный корень $x = \frac{b}{a}$.

2) $a = 0$; имеем уравнение $0x = b$; при $b \neq 0$ корней нет; при $b = 0$ корень — любое число.

● Неравенство $ax > b$:

1) $a \neq 0, b \neq 0$; решение неравенства — числовой луч: $x > \frac{b}{a}$, если $a > 0$, и $x < \frac{b}{a}$, если $a < 0$.

2) $a = 0$; имеем неравенство $0x > b$; при $b \geq 0$ решений нет; при $b < 0$ решение — множество $(-\infty; +\infty)$.

Замечание. В линейном уравнении и в линейном неравенстве, возможные решения которых мы исследовали, коэффициенты не заданы конкретными числовыми значениями, а обозначены буквами. В таких случаях эти буквы называют **параметрами**, и мы определяли, при каких значениях этих параметров существуют решения уравнения (неравенства) и каковы они.

УПРАЖНЕНИЯ

ПРИМЕНЯЕМ ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПРАВИЛА

50

Какие из чисел -3 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 являются решениями данного неравенства, а какие не являются:

а) $2x + 8 < 12$; б) $y < 3y + 1$; в) $z^2 \leq z$; г) $\frac{4}{a-2} > 0$?

51

Подберите какие-нибудь два числа, являющиеся решениями данного неравенства, и два числа, не являющиеся его решениями:

а) $x < 5x$; б) $\frac{1}{y} > y$; в) $a > -a^2$; г) $z \leq z^2$.

52

Объясните, как из первого неравенства получено второе, ему равносильное:

а) $x + 3 < 7$; $x < 4$; в) $-x \leq -7$; $x \geq 7$; д) $\frac{x}{3} > -1$; $x > -3$;
б) $3x \leq 15$; $x \leq 5$; г) $-2x > 6$; $x < -3$; е) $\frac{x-2}{4} < 4$; $x < 18$.

53

Составьте три неравенства, множеством решений которых является промежуток $(-5; +\infty)$.

54

Объясните, почему неравенство не имеет решений или его решением является любое число:

а) $x > x - 5$; б) $x < x + 1$; в) $-x^2 \leq 0$; г) $x^2 + 1 \geq 0$; д) $|x + 2| < 0$.

РЕШАЕМ НЕРАВЕНСТВА

55

Решите неравенство; изобразите множество его решений на координатной прямой:

а) $5x + 3 \leq 8$; в) $6 - 2x < -4$; д) $2 + \frac{x}{2} \leq -1$; ж) $-\frac{1}{3}x + 7 < 3$;
б) $2x - 3 < 9$; г) $-12x - 4 > 12$; е) $\frac{x}{3} - 1 > -5$; з) $1 \geq 1 - \frac{x}{8}$.

Решите неравенство (№ 56–60):

56

а) $3y + 7 \leq 1 - 5y$; г) $\frac{3}{4}x - \frac{1}{2} \geq x + \frac{1}{4}$; ж) $4x + 1 < 2x - 3$;
б) $5 - 4x > 2x - 4$; д) $-\frac{x}{4} - 3 < \frac{x}{8} - 1$; з) $\frac{x}{2} + \frac{1}{6} \leq \frac{2}{3} - x$;
в) $5 - 6y \geq 1 - 2y$; е) $9 - y > 9 + \frac{y}{2}$; и) $5y - 4 < 2 + y$.

57

а) $14 \leq 2 - 2(x - 1)$; г) $6(x + 12) \geq 3(x - 4)$; ж) $(3x + 2) - 3(2x + 3) > 12$;
б) $20 - 3(x + 3) \geq 5$; д) $5(3 - x) < 4(2 - x)$; з) $x - 5(x - 4) < 6x + 20$;
в) $\frac{1}{2}(3x - 1) > 10$; е) $8 > \frac{2}{3}(4x + 7)$; и) $5(4x + 3) - 7(3x - 4) \leq 10$.

58

а) $\frac{12 - 2x}{3} > \frac{3x - 1}{4}$; в) $\frac{x + 17}{4} < \frac{3(10 + x)}{5}$; д) $\frac{2(x - 2)}{9} \leq \frac{3 + x}{7}$;
б) $\frac{2x + 9}{5} > \frac{1 - 3x}{7}$; г) $\frac{4x + 1}{2} \geq \frac{7x - 30}{6}$; е) $\frac{9 - 2x}{3} > \frac{12 - x}{6}$.

59

а) $12 - x < \frac{5(x-1)}{6}$; в) $\frac{3x+6}{5} - \frac{3x-8}{4} \geq 2$; д) $\frac{x-4}{3} - 2 < \frac{x}{2}$;
 б) $\frac{3(4x+3)}{5} > 4x-3$; г) $\frac{1+8x}{11} \leq 10 - \frac{3x+2}{2}$; е) $10x - \frac{9(3x+7)}{4} > 33$.

60

а) $8 - 6(x-5) \geq 5(2x-7) - 7$; в) $7(1-x) + 15x \leq -2(x-5) - 1$;
 б) $2x + 2(6x-8) < 9(x+4)$; г) $2(x-4) - (x-5) \leq 1 - 7(2-x)$.

61

Приведите неравенство к виду $0x < b$ ($0x \leq b$) или $0x > b$ ($0x \geq b$) и найдите множество его решений:

а) $\frac{1}{3}(6x+3) < 3x - (x-1)$; в) $(2x+1)^2 + (x-2)^2 \geq 5(x+1)(x-1)$;
 б) $19 - 6x \leq x - 7(x + \frac{3}{2})$; г) $2(3x+1) + x - 2 > 4x + 5 - 3(1-x)$.

62

Решите неравенство:

а) $\frac{2-x}{6} + \frac{x+7}{15} < \frac{8-x}{2}$; г) $\frac{x-3}{8} + \frac{3x-37}{2} \leq \frac{25-x}{4} + 3$;
 б) $\frac{2x+1}{18} - \frac{x+2}{9} < \frac{x-6}{6}$; д) $\frac{3-4x}{7} + \frac{6x-5}{5} \geq \frac{10x-9}{14} - \frac{5x-9}{10}$;
 в) $\frac{19}{4} - \frac{5x+16}{3} \leq \frac{3x+1}{4} - 2x$; е) $\frac{x-1}{2} - \frac{x+4}{3} + \frac{x+5}{5} < x-4$.

63

Найдите все решения неравенства, принадлежащие заданному промежутку:

а) $\frac{2x-1}{2} > \frac{1+5x}{8} - 1$, $[-2; 3]$;
 б) $\frac{(2x+1)^2}{3} - \frac{2x+1}{2} \leq \frac{4x^2}{3} - 1$, $[-3; -1]$;
 в) $\frac{x+2}{20} - \frac{1-2x}{5} \leq \frac{3x}{20} - \frac{1}{10}$, $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$;
 г) $\frac{3x-2}{5} + \frac{1}{2} \geq \frac{4x+1}{5} - \frac{1}{2}$, $[-15; 15]$.

64

а) Найдите наибольшее целое число, при котором разность дробей $\frac{3x+7}{4}$ и $\frac{16-3x}{3}$ отрицательна.
 б) Найдите наименьшее целое число, при котором сумма дробей $\frac{3x-7}{4}$ и $\frac{16+3x}{3}$ положительна.

65

а) Найдите все целые положительные решения неравенства $3x < \sqrt{45}$.
 б) Найдите все целые отрицательные решения неравенства $-2x < \sqrt{24}$.

ПРИМЕНЯЕМ НЕРАВЕНСТВА К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

МАТЕМАТИКА ВОКРУГ НАС

66

Решите задачу, составив неравенство по её условию:

а) Фермер перевозит на грузовике картофель в мешках по 40 кг. Масса грузовика без груза равна 4500 кг. Какое количество мешков с картофелем может находиться в грузовике, чтобы он мог переехать через ручей по мосту, выдерживающему груз в 7 тонн?



б) В 2015 г. один из операторов городской телефонной связи в Москве предлагал следующие условия ежемесячной поминутной оплаты: абонентская плата составляет 194 р. плюс 48 к. за каждую минуту (полную и неполную) исходящего вызова на городские номера. Сколько минут разговоров с исходящими вызовами может позволить себе абонент, если он планирует платить за телефон не более 320 р. в месяц?



67

а) Дом Петра находится на расстоянии 1200 м от школы и 600 м от дома Андрея. На каком расстоянии от школы может находиться дом Андрея?

б) Путь от дома до школы пешком занимает у Ирины 15 мин, а от дома до стадиона 30 мин. Все три пункта связаны прямолинейными дорогами. Сколько минут может занимать у неё дорога от школы до стадиона?

Подсказка. Изобразите на рисунке все дороги отрезками.

68

Без построения графика определите, при каких значениях аргумента функция принимает положительные значения и при каких — отрицательные:

а) $y = 3x - 7$; б) $y = 1 - 6x$.

Для каждого случая изобразите схематически график функции.

69

Определите, при каких значениях аргумента точки графика функции $y = f(x)$ расположены выше точек графика функции $y = g(x)$ и при каких ниже. Выполните задание двумя способами: сначала решив неравенство, а затем построив графики в одной системе координат:

а) $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = -2x + 1$; б) $f(x) = 0,5x$, $g(x) = 3 - x$.

70

Найдите все значения x , при которых имеет смысл выражение:

а) $\sqrt{0,5x}$; б) $\frac{1}{\sqrt{-2x}}$; в) $\sqrt{3x - 10}$; г) $\sqrt{4 - 10x}$; д) $\sqrt{\frac{2x - 6}{5}}$; е) $\frac{2}{\sqrt{1 - x}}$.

71

При каких значениях параметра a корень уравнения равен нулю; является числом положительным; является числом отрицательным:

а) $4x = a - 8$; б) $5(x - 1) = 4 - 2a$; в) $ax + 2 = x + 10$; г) $(1 - a)x = 6 - x$?

72

При каких значениях параметра a квадратное уравнение не имеет корней:

а) $ax^2 - 10x + 15 = 0$; б) $ax^2 + 2x - 5 = 0$?

Для каждого уравнения приведите три примера значений a , при которых множество решений уравнения пусто.

73

При каких значениях параметра c уравнение имеет корни:

а) $2x^2 - 3x + c = 0$; б) $-3x^2 - 3x + c = 0$?

Имеет ли уравнение корни при c , равном -1 ; $-0,5$; 0 ; $1,5$?

74

а) Найдите все целые положительные значения c , при которых можно разложить на множители квадратный трёхчлен $2x^2 + 8x + c$.

б) Найдите все целые отрицательные значения c , при которых можно разложить на множители квадратный трёхчлен $5x^2 - 10x - c$.

1.5

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- В каких случаях говорят о решении системы неравенств.
- Как находят множество решений системы неравенств.
- Как применяют системы неравенств к решению разнообразных задач.



Рис. 1.16

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ
ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ

Выражение $\sqrt{6-x} + \sqrt{2x-4}$ при одних значениях x имеет смысл, а при других не имеет. Возьмём, например, $x = 8$ и подставим это значение в данное выражение, получим: $\sqrt{-2} + \sqrt{12}$. Это выражение смысла не имеет, так как в первом слагаемом под знаком корня получилось отрицательное число. Если взять $x = 3$, то получим выражение $\sqrt{3} + \sqrt{2}$. Оно имеет смысл, так как в каждом случае под знаком корня записано положительное число. А как найти все значения x , при которых данное выражение имеет смысл?

ЧТО ПОНИМАЮТ ПОД СИСТЕМОЙ НЕРАВЕНСТВ Рассмотренное выше выражение $\sqrt{6-x} + \sqrt{2x-4}$ имеет смысл при тех и только тех значениях x , при которых оба слагаемых имеют смысл, т.е. когда одновременно выполняются неравенства $6-x \geq 0$ и $2x-4 \geq 0$.

Решим каждое из них. В первом случае получим $x \leq 6$, во втором — $x \geq 2$. Теперь с помощью координатной прямой найдём пересечение числовых промежутков $x \leq 6$ и $x \geq 2$. Получим отрезок с концами в точках 2 и 6 (рис. 1.16).

Таким образом, множеством допустимых значений переменной x в выражении $\sqrt{6-x} + \sqrt{2x-4}$ служит промежуток $[2; 6]$.

Если требуется найти множество значений переменной, удовлетворяющих одновременно двум или несколькими неравенствам, говорят, что нужно решить **систему неравенств**. Её, как и систему уравнений, обозначают фигурной скобкой. При решении рассмотренной задачи мы фактически решили систему неравенств

$$\begin{cases} 6-x \geq 0, \\ 2x-4 \geq 0. \end{cases}$$



Чтобы решить систему двух или нескольких неравенств с одной переменной, надо решить каждое неравенство в отдельности и затем с помощью координатной прямой найти пересечение их множеств решения.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ НЕРАВЕНСТВ

Пример 1. Решим систему неравенств $\begin{cases} 3x-2 < 2+5x, \\ 8x > 15-2x. \end{cases}$

Решим каждое неравенство отдельно, а затем найдём множество их общих решений:

$$\begin{array}{ll} 1) \ 3x-2 < 2+5x; & 2) \ 8x > 15-2x; \\ \quad -2x < 4; & \quad 10x > 15; \\ \quad x > -2. & \quad x > 1,5. \end{array}$$

Теперь воспользуемся координатной прямой (рис. 1.17). Общей частью (пересечением) этих двух лучей служит множество чисел, больших 1,5, т.е. луч $(1,5; +\infty)$.

Ответ: $(1,5; +\infty)$.

Пример 2. Решим систему неравенств $\begin{cases} 4 - \frac{x}{2} > 5, \\ 1 + 6x > 4. \end{cases}$

Решение можно оформить иначе, чем это сделано в примере 1, а именно можно решать оба неравенства параллельно, переходя от одной системы к другой, равносильной ей:

$$\begin{cases} -\frac{x}{2} > 1, \\ 6x > 3; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x}{2} < -1, \\ x > 0,5; \end{cases} \quad \begin{cases} x < -2, \\ x > 0,5. \end{cases}$$

Из рисунка 1.18 видно, что неравенства $x < -2$ и $x > 0,5$ общих решений не имеют, следовательно, система решений не имеет.

Ответ: $\emptyset$.

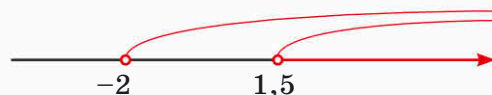


Рис. 1.17



Рис. 1.18

РЕШЕНИЕ ДВОЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ

Пример 3. Решим двойное неравенство $-2 \leq 3 - x \leq 5$.

1) Свойства неравенств применимы и в этом случае.

Прибавим -3 к каждой части двойного неравенства (или иначе: перенесём число 3 с противоположным знаком из средней части влево и вправо)

$$-2 - 3 \leq -x \leq 5 - 3$$

$$-5 \leq -x \leq 2$$

Умножим все части неравенства на -1 , поменяв оба знака неравенства на противоположные

$$5 \geq x \geq -2$$

Перепишем полученное неравенство справа налево

$$-2 \leq x \leq 5$$

Множество решений неравенства — отрезок $[-2; 5]$.

2) Можно рассуждать и иначе. Требуется найти такие значения переменной, при которых одновременно выполняются два неравенства $-2 \leq 3 - x$ и $3 - x \leq 5$,

т.е. нужно решить систему неравенств $\begin{cases} -2 \leq 3 - x, \\ 3 - x \leq 5. \end{cases}$

Решив каждое неравенство, получим $\begin{cases} x \leq 5, \\ x \geq -2. \end{cases}$

Множество решений системы, а значит, и двойного неравенства, изображено на рисунке 1.19. Естественно, получен тот же ответ.

Рис. 1.19



В некоторых случаях решить двойное неравенство можно только сведением его к системе. Например, в двойном неравенстве $x + 4 \leq 2x - 3 \leq 5$ невозможно «изолировать» слагаемое с переменной x в какой-либо одной части. И единственный способ — перейти от двойного неравенства к системе.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

● Найдите с помощью координатной прямой пересечение числовых промежутков, заданных неравенствами: а) $x < 10$ и $x > -5$, б) $x \geq 10$ и $x \geq 5$. Запишите результат с помощью числового промежутка.

● Что значит решить систему неравенств? Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 3x - 12 \geq 0, \\ 10 - 2x \geq 0. \end{cases}$$

● Решите двойное неравенство

$$3 < 2x - 1 < 11$$

любым из способов, рассмотренных в примере 3.

УПРАЖНЕНИЯ

РЕШАЕМ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ

75

Каждую систему неравенств соотнесите с соответствующим ей промежутком координатной прямой:

A) $\begin{cases} x < 2, \\ x < 5. \end{cases}$



B) $\begin{cases} x \geq -2, \\ x \geq -5. \end{cases}$



B) $\begin{cases} x \geq -2, \\ x < 5. \end{cases}$



76

Проиллюстрируйте с помощью координатной прямой систему неравенств и запишите множество её решений:

a) $\begin{cases} x > 2,5, \\ x < 6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x > -3, \\ x > 3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x \leq 0, \\ x \leq 4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x < 5, \\ x > 7; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x > 2, \\ x \leq -5; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x \leq 1,5, \\ x \geq -3,5. \end{cases}$

77

Решите систему неравенств и определите, сколько целых решений она имеет:

a) $\begin{cases} x - 4 > -3, \\ x + 6 < 10; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 6 - y > 2, \\ 5 + y > 8; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2y + 1 \leq 1, \\ 2y + 3 \geq -2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} z - 2 > 3, \\ z + 5 \geq -3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x + 2 \leq -2, \\ 2 - x \leq 8; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 5 + 2z > 7, \\ 3z - 5 < 4. \end{cases}$

Решите систему неравенств (№ 78–81):

78

a) $\begin{cases} x + 5 > 0, \\ x - 2 > 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 8 - 4z > 0, \\ 5z - 3 < 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3 - 9x > 0, \\ 3 - 6x < 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 5y - 20 < 0, \\ 2y + 5 > 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3 - 5y \geq 0, \\ 4y - 1 \geq 0; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 3z + 4 < 0, \\ 3z + 1 < 0. \end{cases}$

79

a) $\begin{cases} 5x - 12 \geq 11x, \\ 4x + 13 < 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3y - 10 \geq 4y - 4, \\ 3y + 2 \geq y + 8; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 4z < z + 9, \\ 4 - 2z > 6; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x + 5 \geq 4x - 2, \\ 6x - 1 \geq 3x + 5. \end{cases}$

80

a) $\begin{cases} 6x - 1 < 5x - 2(x - 7), \\ 8 - x > 3x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2(3 - 2y) \geq 4 - 3y, \\ 1 - 2(3 - y) \geq 5 - 3y; \end{cases}$ в) $\begin{cases} z + 2 > 3(z - 2), \\ 3z - 2(1 + 2z) \leq 0. \end{cases}$

81

a) $\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{x}{5} > 3, \\ 21 - x > 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{x}{3} + x < 2, \\ 2x - 4 < 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2y > -3, \\ \frac{y}{8} - \frac{y}{4} \leq \frac{1}{2}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3y + 4 > 4, \\ \frac{y}{5} - y \geq 8. \end{cases}$

82

Найдите решения двойного неравенства:

a) $-1 < 3x < 12;$ б) $0 < z - 6 < 24;$ в) $0 \leq 2y + 3 \leq 18;$

б) $3 \leq -2y \leq 9;$ г) $-10 < x + 1 < 10;$ д) $3 < 12 - z < 11.$

Решите систему неравенств (№ 83–84):

83

a) $\begin{cases} 3 - \frac{x-1}{2} > 1, \\ 2x + \frac{x}{3} < 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 1 - \frac{2x+3}{3} > 2 - \frac{x+1}{4}, \\ 5(x-4) - 8 > 6(2x-1) - 1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \frac{x+1}{4} - \frac{x+1}{6} < \frac{x+1}{3}, \\ \frac{x-3}{4} + x < 2x - \frac{x-3}{8}. \end{cases}$

84

а)
$$\begin{cases} x > -3, \\ x > -1, \\ x < 0; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} x < -0,25, \\ x < 0,5, \\ x < -0,4; \end{cases}$$

в)
$$\begin{cases} 2x - 5 < 0, \\ x + 4 \geq 2, \\ 3x + 3 > 0; \end{cases}$$

г)
$$\begin{cases} -7x \geq 14, \\ \frac{x}{3} > -1, \\ 3(x - 1) < 6. \end{cases}$$

85

При каких значениях параметра c система неравенств $\begin{cases} 5x + 2 \leq 0, \\ x - c \geq 0 \end{cases}$ имеет решения? имеет единственное решение? не имеет решений?

ПРИМЕНЯЕМ СИСТЕМЫ НЕРАВЕНСТВ

86

МАТЕМАТИКА ВОКРУГ НАС Определите, возможна следующая ситуация или нет.

а) Один покупатель, расплачиваясь в магазине за 3 кг огурцов по 50 р. за килограмм и 2 кг моркови, заплатил меньше 230 р., а другой за 4 кг этих же огурцов и килограмм этой же моркови заплатил больше 230 р.

б) Один покупатель за 4 тетради по 25 р. и 12 одинаковых шариковых ручек заплатил меньше 200 р., а другой за 2 такие же тетради и 15 таких же ручек заплатил больше 200 р.

87

а) В классе играли в игру «Задумай число». Учитель сказал: «Я задумал целое нечётное число. Если к нему прибавить 15, то сумма окажется меньше утроенного задуманного числа, а если прибавить 10, то сумма будет больше удвоенного числа. Какое число я задумал?» Дайте ответ на этот вопрос.

б) В следующий раз условие было таким: «Я задумал целое число. Прибавив к нему 20, я получу больше, чем если бы умножил его на 8, но меньше, чем если бы умножил его на 9. Какое число я задумал?» Подумав, один из учеников сказал, что это невозможно. Докажите это.



88

1) Найдите промежуток, на котором функции $y = 2x - 4$ и $y = -\frac{1}{2}x - 2$ одновременно принимают отрицательные значения.

2) Проиллюстрируйте своё решение с помощью графиков; отметьте на оси x соответствующий промежуток.

3) Укажите какое-нибудь значение аргумента, не принадлежащее отмеченному промежутку, и определите знак каждой из функций при этом значении.

4) Существуют ли значения аргумента, при которых обе функции принимают положительные значения? Проверьте свой ответ, решив систему неравенств.

89

Определите, при каких значениях a данное выражение имеет смысл; приведите пример рационального и иррационального значений a , при которых данное выражение имеет смысл; при которых оно не имеет смысла:

а) $\sqrt{a + 2} + \sqrt{a - 2};$

б) $\sqrt{2a + 3} - \sqrt{3 - a}.$

1.6

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Как с алгебраической точки зрения определяются отношения «больше», «меньше».
- Некоторые способы и приёмы доказательства неравенств.

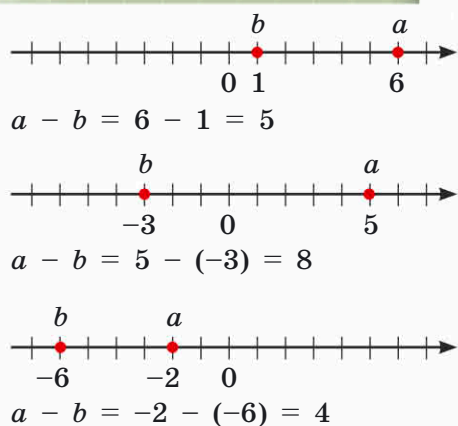
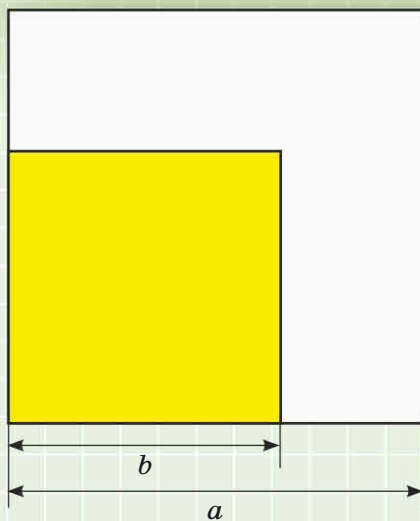


Рис. 1.20



$$\begin{aligned}
 a &> b > 0 \\
 S_1 &= a^2, S_2 = b^2 \\
 S_1 &> S_2 \\
 a^2 &> b^2
 \end{aligned}$$

Рис. 1.21

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО
НЕРАВЕНСТВ

Как вы уже знаете, в математике часто встречаются общие утверждения, в которых речь идёт о неравенствах. В этом пункте вы познакомитесь с алгебраическими приёмами доказательства таких утверждений.

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТРАКТОВКА ОТНОШЕНИЙ «БОЛЬШЕ» И «МЕНЬШЕ»

Возьмём два различных числа a и b . И пусть $a > b$. Тогда на координатной прямой точка a расположена правее точки b , и разность чисел a и b положительна, т.е. $a - b > 0$ (рис. 1.20). Верно и обратное: если $a - b > 0$, то на координатной прямой точка a расположена правее точки b , т.е. $a > b$.

Эти два утверждения можно объединить в одно:



$a > b$ в том и только том случае, когда разность $a - b$ положительна.

Аналогичные рассуждения можно провести и в случае, когда $a < b$:



$a < b$ в том и только том случае, когда разность $a - b$ отрицательна.

Используя эти утверждения, можно алгебраически доказать свойства неравенств, в справедливости которых вы убедились геометрически — с помощью координатной прямой. Покажем это на одном примере.

Пример 1. Докажем свойство транзитивности неравенств: если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$.

Сравним с нулём разность $a - c$. Для этого преобразуем её с помощью приёма «прибавить — вычесть»:

$$a - c = a - b + b - c = (a - b) + (b - c).$$

Так как $a > b$, то $a - b > 0$; так как $b > c$, то $b - c > 0$. Сумма двух положительных чисел положительна, следовательно, $a - c > 0$ и $a > c$.

СРАВНЕНИЕ КВАДРАТОВ ДВУХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Пример 2. Докажем, что если a и b — положительные числа, то $a^2 > b^2$ в том и только том случае, когда $a > b$.

Этот факт вам уже известен. Его легко проиллюстрировать геометрически (рис. 1.21). Теперь приведём алгебраическое доказательство. Оно состоит из двух частей. Сначала докажем, что если $a > b > 0$, то $a^2 > b^2$. Затем докажем обратное утверждение: если a и b положительные числа и $a^2 > b^2$, то $a > b$.

1) Рассмотрим разность $a^2 - b^2$:

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. В этом произведении $a - b > 0$ (так как $a > b$) и $a + b > 0$ (сумма двух положительных чисел). Следовательно, $a^2 - b^2 > 0$ и $a^2 > b^2$.

2) Неравенство $a^2 > b^2$ означает, что $a^2 - b^2 > 0$. Отсюда $(a - b)(a + b) > 0$. И так как в этом произведении $a + b > 0$, то и $a - b > 0$, т.е. $a > b$.

Замечание. Доказательство первой части можно провести иначе: перемножим почленно два одинаковых неравенства с положительными членами $a > b$ и $a > b$, получим $a \cdot a > b \cdot b$ т.е. $a^2 > b^2$.

Покажем пример использования доказанного неравенства для сравнения чисел.

Пример 3. Сравним числа 14 и $\sqrt{50} + \sqrt{48}$.

Поставим любой знак неравенства между этими числами, например: $14 < \sqrt{50} + \sqrt{48}$. Нам неизвестно, верно это неравенство или нет. Но для наших рассуждений это не имеет значения. Будем далее пользоваться «алгеброй неравенств» с целью избавиться от корней. При этом верное неравенство будет заменяться верным, а неверное — неверным.

$$14 < \sqrt{50} + \sqrt{48}$$

$$14^2 < (\sqrt{50} + \sqrt{48})^2$$

— возвели в квадрат обе части неравенства с положительными членами

$$196 < 50 + 2 \cdot \sqrt{50 \cdot 48} + 48$$

— преобразовали обе части неравенства

$$98 < 2 \cdot \sqrt{50 \cdot 48}$$

— «уединили» радикалы

$$49 < \sqrt{50 \cdot 48}$$

— разделили обе части неравенства на 2

$$49^2 < 50 \cdot 48$$

— ещё раз возвели обе части неравенства в квадрат

Выполнив вычисления, получим $2401 < 2400$. Это неравенство неверно. Значит, мы ошиблись, когда поставили знак $<$. Понятно, что если бы мы вначале поставили знак $>$ и провели те же самые преобразования, то получили бы верное неравенство $2401 > 2400$. Таким образом, $14 > \sqrt{50} + \sqrt{48}$.

НЕРАВЕНСТВО МЕЖДУ СРЕДНИМ АРИФМЕТИЧЕСКИМ И СРЕДНИМ ГЕОМЕТРИЧЕСКИМ В математике есть ряд важных неравенств, которые чрезвычайно полезны и часто используются при доказательстве других неравенств. Докажем одно из них и покажем его применение.

Пример 4. Докажем, что для положительных чисел a и b выполняется неравенство $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Вы знаете, что $\frac{a+b}{2}$ — это *среднее арифметическое* чисел a и b . А выражение $\sqrt{ab}$ называют *средним геометрическим* этих чисел.

Убедиться в том, что полученное в примере 3 неравенство $49^2 < 50 \cdot 48$ неверно, можно и не выполняя вычислений. Если подметить некоторую особенность в числах, то можно поступить так:

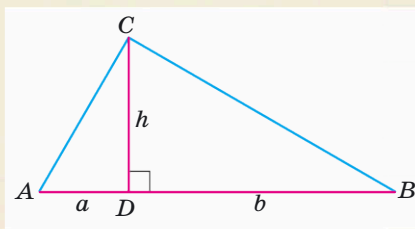
$$49^2 < 50 \cdot 48,$$

$$49^2 < (49 + 1)(49 - 1),$$

$$49^2 < 49^2 - 1.$$

Неравенство неверно.

Среднее геометрическое двух чисел называют ещё их средним пропорциональным. И то и другое название пришло из геометрии. Многие геометрические величины связаны этим отношением. Вот пример. В курсе геометрии вы доказывали теорему: высота h , проведённая в прямоугольном треугольнике из вершины прямого угла к гипотенузе, является средним пропорциональным (или средним геометрическим) отрезков, на которые она делит гипотенузу.



Дело в том, что треугольники ACD и CBD подобны, значит, их соответственные стороны пропорциональны: $\frac{a}{h} = \frac{h}{b}$. Отсюда $h^2 = ab$, или $h = \sqrt{ab}$.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Приведите алгебраическую трактовку отношений «больше» и «меньше».
- Докажите алгебраически свойство транзитивности отношения «меньше».
- Докажите, что если $a > 0$ и $b > 0$, то $a^2 < b^2$ в том и только том случае, когда $a < b$ (см. доказательство, приведённое в примере 2).

Таким образом, требуется доказать, что



среднее арифметическое двух чисел не меньше их среднего геометрического.

Для доказательства можно составить разность и сравнить её с нулём (сделайте это самостоятельно). Но здесь мы применим другой приём: будем заменять одно неравенство другим, равносильным ему, пока не получим очевидное неравенство:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

$$a+b \geq 2\sqrt{ab}$$

– умножили обе части на 2

$$a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab$$

– возвели в квадрат обе части неравенства с положительными членами

$$a^2 + 2ab + b^2 - 4ab \geq 0$$

– перенесли $4ab$ с противоположным знаком в левую часть

$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

– привели подобные члены

$$(a-b)^2 \geq 0$$

– «свернули» трёхчлен в левой части в квадрат двучлена

Полученное неравенство верно при любых значениях a и b , в том числе и при положительных. Таким образом, исходное неравенство верно, что и требовалось доказать.

Покажем, как можно применить доказанное неравенство для доказательства другого неравенства.

Пример 5. Докажем, что если a , b и c — положительные числа, то $a + b + c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac}$. Согласно неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим, имеем

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \quad \frac{b+c}{2} \geq \sqrt{bc}, \quad \frac{a+c}{2} \geq \sqrt{ac}.$$

Сложим эти три неравенства почленно:

$$\frac{a+b}{2} + \frac{b+c}{2} + \frac{a+c}{2} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac},$$

$$\frac{2a + 2b + 2c}{2} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac},$$

$$a + b + c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac}.$$

Неравенство доказано.



Вы познакомились с разными приёмами доказательства неравенств: сравнение разности левой и правой частей неравенства с нулём; замена неравенства ему равносильным на основе свойств неравенств, использование «классических» неравенств. Выбор способа для конкретного случая — это творческий процесс. В нём многое зависит от вашего собственного опыта.

УПРАЖНЕНИЯ

90

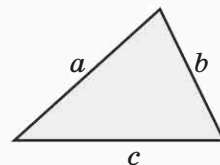
Сравните a и b , если:

- а) $a - b = 0,3$; б) $a - b = -10$; в) $a - b = 1 - \sqrt{3}$; г) $b - a = \sqrt{5} - 2$.

91

Определите, положительным или отрицательным является значение следующего выражения, если a , b и c — длины сторон треугольника:

- а) $a + b - c$; б) $a - b - c$; в) $a + c - b$; г) $c - a - b$.



92

Сравните с нулём:

- а) $a^2 + b^2$; б) $(a + b)^2$; в) $-(a - b)^2$; г) $a^2 + 1$; д) $\frac{1}{a^2 + 1}$; е) $-\frac{1}{a^2 + 1}$.

93

Докажите алгебраическим способом свойства неравенств:

- а) если $a \leq b$ и $b \leq c$, то $a \leq c$;
б) если $a > b$ и c — любое число, то $a + c > b + c$;
в) если $a > b$ и $c > 0$, то $ac > bc$;
г) если $a \leq b$ и $c < 0$, то $ac \geq bc$.

94

Докажите, что для любых чисел a и b верно неравенство:

- а) $a^2 + b^2 \geq 2ab$; б) $(a + b)^2 \geq 4ab$; в) $\frac{a^2 + 1}{2} \geq a$; г) $\frac{a}{a^2 + 1} \leq \frac{1}{2}$.

95

Докажите, что если $a > 0$, то $a + \frac{1}{a} \geq 2$. Выполните доказательство двумя способами: 1) на основе оценки разности левой и правой частей неравенства; 2) с использованием неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим. Проиллюстрируйте доказанное свойство примерами.

96

Докажите разными способами свойство почленного умножения неравенств одного знака с положительными числами (выберите какой-либо один из знаков неравенства).

Подсказка. 1) Сравните с нулём разность левой и правой частей доказываемого неравенства, применив приём «прибавить — вычесть». 2) Воспользуйтесь свойством транзитивности неравенств.

97

Пусть a , b , c и d — положительные числа. Докажите, что $\frac{a}{b} \geq \frac{c}{d}$ в том и только том случае, когда $ad \geq bc$. Пользуясь этим фактом, сравните дроби:

$$\frac{6}{19} \text{ и } \frac{7}{18}; \quad \frac{8}{23} \text{ и } \frac{7}{24}.$$

98

Сравните:

- а) $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ и $\sqrt{2} + \sqrt{6}$; в) $\sqrt{8} - \sqrt{2}$ и $\sqrt{10} - \sqrt{3}$;
б) 8 и $\sqrt{15} + \sqrt{17}$; г) $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2}$ и $\frac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{2}$.

99

ЗАДАЧА-ИССЛЕДОВАНИЕ

1) а) Проведите эксперимент: возьмите любую правильную дробь, большую нуля, и выясните, увеличивается она или уменьшается при прибавлении к числителю и знаменателю одного и того же натурального числа. б) Запишите в буквенном виде установленную закономерность. Докажите записанное неравенство.

2) Проведите такое же исследование для неправильной дроби.

1.7

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Что понимают под словами «точность», «погрешность», «относительная погрешность».
- Как в записи приближённых значений величин учитывается погрешность приближения.

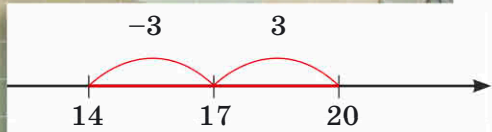


Рис. 1.22



ЧТО ОЗНАЧАЮТ СЛОВА «С ТОЧНОСТЬЮ ДО...»

Сегодня никакие информационные программы радио или ТВ, новостные веб-сайты не обходятся без презентации данных различных социологических исследований. Эти данные всегда имеют определённую погрешность. Разберёмся в этом вопросе подробнее.

ПОГРЕШНОСТЬ ПРИБЛИЖЁННОГО ЗНАЧЕНИЯ, ТОЧНОСТЬ В регионе планируется проведение губернаторских выборов. Предварительные результаты онлайн-голосования говорят, что за кандидата А собираются голосовать 17 % избирателей и погрешность этого результата не превосходит 3 %. Это означает, что в действительности соответствующий процент может отличаться от 17 % в ту или иную сторону не более чем на 3 %, т.е. он содержится в промежутке от 14 до 20 % (рис. 1.22).

С помощью математических символов полученный результат можно записать по-разному:

$$x = 17 \pm 3 \%, \text{ или } 14 \% \leq x \leq 20 \%,$$

где x — неизвестный нам точный процент избирателей, предпочитающих кандидата А.

Эти записи задают один и тот же промежуток.

Как читаются эти записи? Как прочитать вторую из них, вам известно. Например, так: x не меньше, чем 14 %, и не больше, чем 20 %. Первая же запись часто читается с использованием слова «точность»: x равен 17 % с точностью до 3 %.

Как перейти от одной записи к другой? От записи с помощью знака « $\pm$ » перейти к двойному неравенству легко: $17 - 3 \leq x \leq 17 + 3$, т.е. $14 \leq x \leq 20$.

Для перехода от записи в виде двойного неравенства к записи с помощью знака « $\pm$ » берут середину данного промежутка и находят расстояние от середины до его концов. Середина промежутка — это среднее арифметическое его концов: $\frac{14 + 20}{2} = 17$. А «удаление» концов промежутка от этого среднего значения равно $20 - 17 = 3$ (или $17 - 14 = 3$).

Получаем $x = 17 \pm 3$.

Итак, слова «с точностью до...» говорят о **погрешности** — максимальном отклонении приближённого значения величины от её истинного значения. Этот факт может быть явно указан с помощью записи $a \pm h$, где a — приближённое значение величины, h — погрешность приближения. Если, например, на банке с краской написано, что масса краски равна $10 \pm 0,05$ кг, то это значит, что масса указана с точностью до 0,05 кг, т.е. краски в банке не менее 9,95 кг и не более 10,05 кг.

ЗАПИСЬ ПРИБЛИЖЁННОГО ЗНАЧЕНИЯ ВЕЛИЧИНЫ И ЕГО ТОЧНОСТЬ

Вам наверняка не раз приходилось находить значения тех или иных величин в справочниках. Эти значения величин в справочной и технической литературе указываются так, что по записи можно судить о точности приближения.

Например, из таблицы плотности металлов можно узнать, что плотность серебра ρ равна $10,50 \text{ г/см}^3$. Последним в записи числа $10,50$ является разряд сотых. Это означает, что приближённое значение плотности серебра указано с точностью до $0,01$:

$$\rho = 10,50 \pm 0,01 \text{ г/см}^3.$$

Вообще, если приближённое значение записано в виде десятичной дроби, то можно считать, что точность приближения составляет единицу последнего разряда.



Почему в значении плотности серебра $10,50 \text{ г/см}^3$ не отбрасывают ноль в конце дроби? Вам, наверное, теперь это понятно. Именно потому, что две цифры после запятой указывают на точность приведённого приближения. Все значения в таблице на полях даны с точностью до $0,01$. А если бы ноль был отброшен, то запись $10,5 \text{ г/см}^3$ означала бы гораздо более грубую погрешность.

Часто приближённое значение записывают в виде произведения $a \cdot 10^n$, где $n \in \mathbb{Z}$. По этой записи также можно получить информацию о точности приближения. Например, из справочника узнаём, что масса Земли m равна $5,976 \cdot 10^{24} \text{ кг}$. Это означает, что

$$m = (5,976 \pm 0,001) \cdot 10^{24} \text{ кг} = 5,976 \cdot 10^{24} \pm 0,001 \cdot 10^{24} \text{ кг} = 5,976 \cdot 10^{24} \pm 10^{21} \text{ кг}.$$

Поэтому масса Земли указана с точностью до 10^{21} кг .

ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ПОГРЕШНОСТЬ Есть ещё важная характеристика приближённого значения величины — **относительная погрешность**. Она позволяет судить о качестве приближения.

Пример. Известны результаты измерения толщины d человеческого волоса и расстояния l от Земли до Луны:
 $d = 0,15 \pm 0,01 \text{ мм}$ и $l = 384\,000 \pm 500 \text{ км}$.

Погрешность первого из них микроскопична, а погрешность второго может показаться громадной! Однако качество второго измерения выше, так как $0,01 \text{ мм}$ составляет значительно большую часть от $0,15 \text{ мм}$, чем 500 км от $384\,000 \text{ км}$. Найдём соответствующие отношения и выразим их в процентах:

$$\frac{0,01}{0,15} \approx 0,067, \text{ или } 6,7\%; \quad \frac{500}{384\,000} \approx 0,001, \text{ или } 0,1\%.$$

Первое приближение получено с относительной погрешностью до $6,7\%$, а второе — до $0,1\%$.



Прибор
для измерения
плотности твёрдых тел

Плотность металлов

Металл	Плотность, г/см ³
Магний	1,74
Алюминий	2,70
Титан	4,50
Цинк	7,14
Олово	7,29
Железо	7,87
Медь	8,94
Серебро	10,50
Свинец	11,34
Золото	19,32

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Каков смысл слов «с точностью до...»? Найдите разъяснение в тексте.
- На банке с лаком для паркета указана масса лака: $5 \pm 0,05 \text{ кг}$. Запишите эту информацию в виде двойного неравенства.
- В справочнике указано приближённое значение массы первого искусственного спутника Земли: $83,6 \text{ кг}$. Определите по этой записи погрешность приближения и найдите относительную погрешность приближённого значения массы.

УПРАЖНЕНИЯ

«С ТОЧНОСТЬЮ ДО...»

100

Запишите с помощью двойного неравенства и проиллюстрируйте запись с помощью координатной прямой:

- а) $x = 17 \pm 0,5$; б) $a = 8,4 \pm 0,4$; в) $y = 118 \pm 5$; г) $c = 350 \pm 10$.

101

Запишите следующий промежуток в форме $x = a \pm h$:

- а) $10 \leq x \leq 14$; б) $8,5 \leq x \leq 9,5$; в) $25 \leq x \leq 30$; г) $7,6 \leq x \leq 7,8$.

Подсказка. Для наглядности воспользуйтесь координатной прямой.

102

Прочитайте предложение, используя слова «с точностью до...». Изобразите на координатной прямой промежуток, в котором находится точное значение измеряемой величины, и запишите этот промежуток.

- а) в упаковке содержится 900 ± 10 мл молока;
 б) в банке содержится $5 \pm 0,01$ кг краски;
 в) длина рулона обоев равна $10,05 \pm 0,05$ м;
 г) во флаконе содержится 30 ± 1 мл духов;
 д) температура воздуха в морозильной камере $15 \pm 0,5$ °С.



103

- а) Развесочный автомат формирует брикеты плавленого сыра массой $62,5$ г с точностью до 2 г. Может ли реальная масса брикета быть равной 60 г; $62,8$ г; 63 г; 65 г?

- б) Стандартные размеры листа бумаги формата А4 равны $29,7 \times 21,0$ см с точностью до $0,1$ см. Соответствуют ли требованиям стандарта реальные размеры листа, равные: $29,65 \times 21,07$ см; $29,75 \times 20,85$ см; $29,6 \times 21,1$ см?

104

Определите, имеют ли данные промежутки общую часть, и если имеют, то укажите её:

- а) $x = 5 \pm 1$, $y = 7 \pm 2$; в) $a = 12,3 \pm 0,5$ и $b = 12,6 \pm 0,1$;
 б) $m = 24 \pm 5$, $n = 26 \pm 5$; г) $x = 0,85 \pm 0,05$, $y = 0,65 \pm 0,05$.

Подсказка. Воспользуйтесь координатной прямой.

МАТЕМАТИКА ВОКРУГ НАС (№ 105–106)

105

Как вы думаете, позволяют ли данные экзитпола (опроса граждан на выходе из избирательного участка после голосования) с достаточной уверенностью прогнозировать победу кандидата А на выборах из двух претендентов, если:

- а) за кандидата А высказались 57 ± 5 % избирателей;
 за кандидата В — 55 ± 5 %;
 б) за кандидата А высказались 28 ± 4 % избирателей;
 за кандидата В — 17 ± 4 %;
 в) за кандидата А высказались 31 ± 3 % избирателей;
 за кандидата В — 26 ± 3 %?

106

Известны результаты испытаний на всхожесть семян одного и того же вида, подготовленных к посеву агрофирмами А и В. Можно ли утверждать, что всхожесть семян какой-либо из этих фирм выше, если испытания дали следующие результаты:

Фирма		А	В
Процент всхожести	а)	80 ± 2 %	90 ± 5 %
	б)	60 ± 3 %	52 ± 3 %
	в)	87 ± 5 %	85 ± 5 %
	г)	74 ± 4 %	81 ± 3 %

ЗАПИСЬ ПРИБЛИЖЁННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И ТОЧНОСТЬ

107

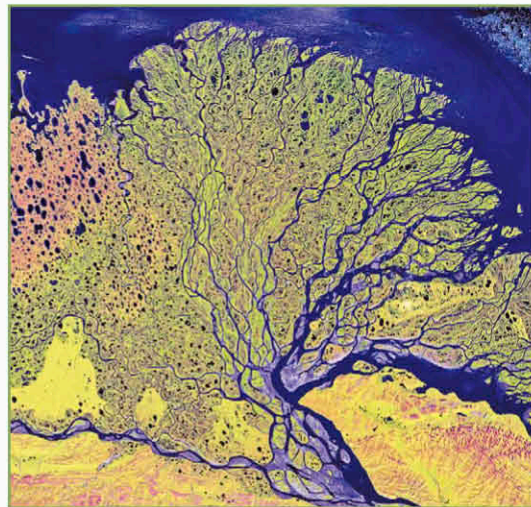
Запишите результат каждого измерения с указанием его точности (т.е. в форме $a \pm h$) и в виде двойного неравенства:

- а) $l \approx 18,3$ см; в) $t \approx 26,78$ с; д) $S \approx 65,2$ м²; ж) $T \approx 99,975$ °С;
 б) $V \approx 20$ л; г) $l \approx 0,2480$ м; е) $\rho \approx 10,50$ г/см³; з) $I \approx 1,5$ А.

108

Определите, с какой точностью приведены в справочнике следующие данные:

- а) площадь Мирового океана равна $366,1 \cdot 10^6$ км²;
 б) площадь поверхности Земли равна 510,2 млн км²;
 в) территория Российской Федерации составляет $1,71 \cdot 10^7$ км²;
 г) площадь водосборного бассейна реки Лена составляет $2,49 \cdot 10^6$ км²;
 д) масса Меркурия равна $3,304 \cdot 10^{23}$ кг;
 е) диаметр молекулы воды равен $2,8 \cdot 10^{-7}$ мм;
 ж) масса электрона равна $0,91 \cdot 10^{-24}$ г.



Дельта реки Лены
(снимок из Космоса)

ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ПОГРЕШНОСТЬ

109

а) Используя данные таблицы масс планет Солнечной системы, определите, какова точность (погрешность) и относительная погрешность приведённого значения массы Юпитера.
Совет. При вычислениях используйте калькулятор.

б) Выберите из этой таблицы самую маленькую планету и решите такую же задачу, как в пункте «а».

110

При измерении толщины одной и той же металлической детали штангенциркулем и микрометром полученные результаты были записаны соответственно в виде: $l \approx 2,5$ мм, $l \approx 2,48$ мм. В каком случае точность измерения выше? Найдите для каждого результата погрешность и относительную погрешность измерения.

111

На токарном станке вытачивают круглые пластины диаметром $l = 5 \pm 0,1$ см. В результате применения новых технологий относительную погрешность, допускаемую при изготовлении детали, удалось уменьшить на 1 %. В каком промежутке теперь заключается точное значение диаметра детали?

Планета	Средний радиус, км	Масса, кг
Меркурий	2437	$3,304 \cdot 10^{23}$
Венера	6050	$4,872 \cdot 10^{24}$
Земля	6371	$5,978 \cdot 10^{24}$
Марс	3388	$6,423 \cdot 10^{23}$
Юпитер	69 720	$1,900 \cdot 10^{27}$
Сатурн	57 900	$5,689 \cdot 10^{26}$
Уран	24 740	$8,72 \cdot 10^{25}$
Нептун	25 000	$1,03 \cdot 10^{26}$
Солнце	696 000	$1,99 \cdot 10^{30}$

УЗНАЙТЕ БОЛЬШЕ

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ И НЕПЕРИОДИЧЕСКИЕ
БЕСКОНЕЧНЫЕ ДЕСЯТИЧНЫЕ ДРОБИ

Десятичные представления рациональных и иррациональных чисел. Любое действительное число, рациональное или иррациональное, может быть представлено в виде бесконечной десятичной дроби (пункт 1.1). Однако десятичные представления рациональных и иррациональных чисел принципиально отличаются друг от друга.

Чтобы разобраться в этом, начнём с деления уголком. Вы прекрасно знаете, что при делении числителя дроби $\frac{1}{3}$ на её знаменатель получается бесконечная десятичная дробь, в которой после запятой повторяется только цифра 3: $\frac{1}{3} = 0,3333\dots$

Теперь попробуйте представить в виде бесконечной десятичной дроби $\frac{5}{11}$. Разделите уголком 5 на 11. Вы увидите, что при делении всё время чередуются остатки 5 и 6, поэтому цифры в частном повторяются:

$$\frac{5}{11} = 0,4545454545 \dots$$

$$\begin{array}{r} 5 \overline{) 11} \\ \underline{50} \\ 44 \\ \underline{60} \\ 55 \\ \underline{50} \\ 44 \\ \underline{60} \\ 55 \\ \underline{5} \end{array}$$

Вообще, деление уголком числителя обыкновенной дроби на её знаменатель всегда приводит к бесконечному повторению одной и той же группы цифр (если, конечно, оно не закончится на каком-либо шаге). Например, для дроби $\frac{1}{3}$ это повторяющаяся цифра 3, а для дроби $\frac{5}{11}$ это пара цифр 45.

Иногда, чтобы получить повторяющуюся группу цифр, выполнять деление приходится довольно долго. Попробуйте разделить числитель дроби $\frac{15}{7}$ на её знаменатель. Только на седьмом шаге повторится остаток 1, и затем начнут повторяться цифры в частном. В результате получится: $\frac{15}{7} = 2,142857142857\dots$

В этом числе нетрудно заметить повторение группы цифр 142857.

Бесконечные десятичные дроби, в которых есть повторяющаяся группа цифр, называют **периодическими дробями**, саму группу называют **периодом** дроби, а число цифр в периоде — **длиной периода**.



Всякое рациональное число $\frac{p}{q}$ представляется в виде бесконечной десятичной периодической дроби.

Это легко объясняется. При делении уголком цифры частного начинают повторяться, когда повторится остаток. Но остатков при делении на число q ровно q : 0, 1, 2, ..., $q - 1$. Так что рано или поздно они начнут повторяться. (Если на каком-либо шаге получится остаток 0, то получится конечная десятичная дробь, т.е. бесконечная десятичная дробь с периодом 0.)

Справедливо и утверждение, обратное сформулированному выше:



всякая бесконечная периодическая дробь представляет рациональное число.

Для периодических дробей принята специальная форма записи — период заключают в скобки:

$$\frac{1}{3} = 0,(3), \quad \frac{5}{11} = 0,(45), \quad \frac{15}{7} = 2,(142857), \quad \frac{3}{22} = 0,1(36).$$

Замечание. Период дроби необязательно начинается сразу после запятой. Пример — последняя из дробей в предыдущей строке; проверьте это, выполнив деление.



Периодом дроби $0,1(36)$ является не только указанный, но и, например, группа 63. Он начинается после второго десятичного знака, и дробь можно записать так: $0,13(63)$. Более того, у каждой периодической дроби бесконечное число периодов. Например:

$$0,1363636... = 0,1(36) = 0,13(63) = 0,1(3636) = ...$$

Но конечно, всегда следует стремиться рассматривать *наименьший период*, т.е. период наименьшей длины.

Покажем на примере, как можно от бесконечной периодической дроби перейти к равной ей обыкновенной дроби. Возьмём действительное число $1,(25)$. Сначала будем избавляться от бесконечного «хвоста» у дробной части числа. Обозначим $0,(25)$ буквой α : $\alpha = 0,(25)$. Тогда $100\alpha = 25,(25)$. Вычтем из второго равенства первое:

$$100\alpha - \alpha = 25,(25) - 0,(25) = 25; \quad 99\alpha = 25; \quad \alpha = \frac{25}{99}; \quad 1,(25) = 1 + \alpha = 1\frac{25}{99}.$$

Так можно поступать с периодической дробью всегда, когда период начинается сразу после запятой. В противном случае можно с помощью двух умножений получить дроби, при вычитании которых бесконечный «хвост» пропадает.

Пусть, например, $\alpha = 0,1(36)$. Имеем

$$10\alpha = 1,(36); \quad 1000\alpha = 136,(36); \quad 1000\alpha - 10\alpha = 136,(36) - 1,(36) = 135; \\ 990\alpha = 135; \quad \alpha = \frac{135}{990} = \frac{3}{22}; \quad 0,1(36) = \frac{3}{22}.$$

Итак, вы узнали, что если число рациональное, то оно представляется периодической дробью, и обратно, если оно представляется периодической дробью, то оно рациональное. Поэтому ясно, что для иррациональных чисел остаётся единственная возможность — быть **непериодическими дробями**. Поэтому, например, сколько ни выписывать знаков бесконечной десятичной дроби $1,4142...$, равной $\sqrt{2}$, период в этой дроби не появится.

Пример. Рассмотрим действительное число, в котором после запятой выписываются подряд последовательные натуральные числа:

$$0,1234567891011121314 \dots 252627 \dots 99100101 \dots$$

Докажем, что оно иррациональное, т.е. что эта бесконечная дробь не имеет периода.

Предположим, что она имеет период длиной n . Согласно правилу построения этой дроби «где-то далеко» в её записи встретится число $1000 \dots 0$, в котором $2n$ нулей. Но так как период состоит из n цифр, то он обязательно должен встретиться на отрезке из $2n$ нулей, т.е. получается, что период состоит

из одних нулей. А такой период имеют только конечные десятичные дроби. Значит, наше предположение о наличии периода у данной бесконечной десятичной дроби неверно.

«Девятка в периоде» — почему этого не бывает. Когда говорят о периодических дробях, то из рассмотрения исключают дроби с бесконечным «хвостом» из одних девяток, т.е. дроби с периодом 9. Это объясняется тем, что наличие таких дробей приводит к некоторым противоречиям. Например, вы знаете, что бесконечные десятичные дроби сравнивают так же, как и конечные десятичные дроби, — поразрядно. И в этом случае должно быть верным неравенство $0,9999 < 1$. Но сейчас вы увидите, что это не так. Представим дробь $0,(9)$ в виде обыкновенной дроби. Применим способ, разобранный выше:

$$0,(9) = \alpha; 10\alpha = 9,(9); 10\alpha - \alpha = 9,(9) - 0,(9) = 9; 9\alpha = 9;$$

$$\alpha = 1.$$

Таким образом, $0,9999 \dots$ и 1 — это две записи одного и того же числа и написанное неравенство неверно! Вообще, любая дробь с периодом 9 является другой формой записи конечных десятичных дробей или целых чисел, и применение правила поразрядного сравнения для всех дробей с периодом из девяток приводит к неверному результату. Поэтому обычно говорят только о десятичных дробях, у которых нет бесконечного «хвоста» из одних девяток. В этом случае правило поразрядного сравнения применяется без всяких противоречий к сравнению любых действительных чисел, заданных в виде бесконечных десятичных дробей.

- 1 Представьте в виде периодической дроби число: а) $\frac{4}{9}$; б) $\frac{3}{11}$; в) $\frac{6}{13}$; г) $\frac{5}{24}$.
- 2 Разверните запись в бесконечную десятичную дробь, записав десять знаков после запятой: а) $0,(21)$; б) $3,(062)$; в) $1,2(34)$; г) $5,24(7)$.
- 3 Сравните: а) $0,(7)$ и $0,(71)$; б) $8,(215)$ и $8,2(15)$; в) $0,(3)$ и $\frac{1}{3}$; г) $1,4$ и $1,(4)$.
- 4 Придумайте какую-нибудь периодическую дробь, заключённую между числами: а) $0,(5)$ и $0,(15)$; б) $0,(20)$ и $0,(200)$; в) $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{2}$; г) $0,12$ и $0,13$.
- 5 Представьте в виде обыкновенной дроби периодическую дробь и затем проверьте себя, выполнив деление числителя на знаменатель (используйте калькулятор): а) $0,(6)$; б) $0,(12)$; в) $1,(135)$; г) $0,2(36)$; д) $2,31(4)$.
- 6 Представьте в виде обыкновенной дроби: а) $0,111\dots$; б) $0,101010\dots$; в) $0,010101\dots$.
- 7 Найдите правило, по которому составлена дробь, и определите, рациональным или иррациональным является соответствующее число: а) $0,303003000300003\dots$; б) $0,246810121416\dots$; в) $0,300300300300\dots$; г) $0,246824682468\dots$.
- 8 Придумайте два рациональных и два иррациональных числа, заключённые между числами 5 и $5,1$.
- 9 Определите, может ли сумма: а) двух периодических дробей быть непериодической; б) двух непериодических дробей быть периодической; в) двух периодических дробей быть периодической.

ЕЩЁ О СРЕДНИХ

Задача о средней скорости. Из пункта A в пункт B автомобиль ехал со скоростью v_1 км/ч, а возвращался со скоростью v_2 км/ч. Какова была средняя скорость автомобиля во время всей поездки?

Решение. Формула среднего арифметического двух скоростей здесь не подходит. Мы должны исходить из того, что средняя скорость движения — это отношение всего пройденного пути ко всему времени движения. Можно записать: $v_{\text{ср.}} = \frac{s_{\text{общий}}}{t_{\text{общее}}}$.

Пусть расстояние от A до B равно p км, время движения из A в B равно t_1 ч, обратно — t_2 ч, скорости на пути туда и обратно — соответственно v_1 км/ч и v_2 км/ч. Тогда: $s_{\text{общий}} = 2p$ (км), $t_1 = \frac{p}{v_1}$ (ч), $t_2 = \frac{p}{v_2}$ (ч), $t_{\text{общее}} = t_1 + t_2 = \frac{p}{v_1} + \frac{p}{v_2}$ (ч), $v_{\text{ср.}} = \frac{2p}{\frac{p}{v_1} + \frac{p}{v_2}}$ (км/ч).

Преобразуем составленную формулу для $v_{\text{ср.}}$:

$$v_{\text{ср.}} = \frac{2p}{\frac{p}{v_1} + \frac{p}{v_2}} = \frac{2pv_1v_2}{p(v_1 + v_2)} = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2}. \text{ Получим } v_{\text{ср.}} = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2}.$$

Если, например, автомобиль ехал из A в B со скоростью 90 км/ч, а возвращался со скоростью 60 км/ч, то средняя скорость автомобиля равна:

$$v_{\text{ср.}} = \frac{2 \cdot 90 \cdot 60}{90 + 60} = 72 \text{ (км/ч)}.$$

(Подставьте $v_1 = 90$ км/ч и $v_2 = 60$ км/ч в формулу среднего арифметического, чтобы убедиться в том, что значение средней скорости, полученное по выведенной формуле, отличается от среднего арифметического скоростей.)

Среднее гармоническое. Формула, которую мы в данном случае составили для вычисления средней скорости движения, называют формулой **среднего гармонического**.

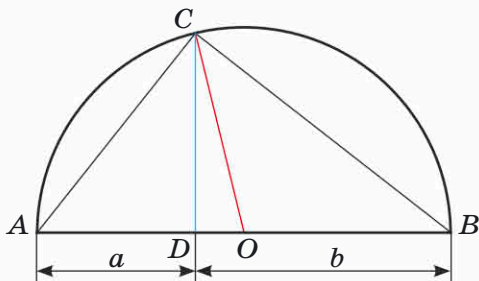


Среднее гармоническое h двух положительных чисел a и b равно отношению удвоенного произведения этих чисел к их сумме: $h = \frac{2ab}{a + b}$.

Формулу среднего гармонического можно преобразовать следующим образом: $\frac{1}{h} = \frac{a + b}{2ab} = \frac{\frac{1}{b} + \frac{1}{a}}{2}$. Иногда её и записывают в таком виде: $\frac{1}{h} = \frac{\frac{1}{b} + \frac{1}{a}}{2}$.

Из такой записи видно, что число, обратное среднему гармоническому чисел a и b , есть среднее арифметическое чисел, обратных a и b .

Среднее арифметическое, среднее геометрическое и среднее гармоническое были хорошо знакомы ещё математикам Античности, создавшим теорию пропорций, на основе которой строилась геометрическая теория чисел, теория площадей и даже древнегреческое учение о музыке.



Геометрическая интерпретация. Существуют различные геометрические иллюстрации неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим двух чисел. На рисунке представлена одна из них.

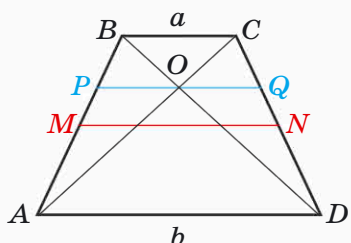
В прямоугольном треугольнике ABC :

$AB = a + b$ — диаметр полуокружности;

OC — радиус окружности, $OC = \frac{a + b}{2}$;

CD — высота треугольника ABC , $CD = \sqrt{ab}$; $OC \geq CD$ (эти отрезки совпадают, если треугольник ABC равнобедренный: $AC = BC$). Значит, $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Среднее гармоническое тоже имеет красивый геометрический образ.



Рассмотрим трапецию с основаниями a и b . Тогда отрезок MN — средняя линия трапеции — равен среднему арифметическому оснований: $MN = \frac{a+b}{2}$. А отрезок PQ , параллельный основаниям и проходящий через точку пересечения диагоналей, равен среднему гармоническому оснований: $PQ = \frac{2ab}{a+b}$.

Действительно, из подобия треугольников PBO и ABD следует, что $\frac{PO}{b} = \frac{PB}{AB}$; из подобия треугольников PAO и BAC следует, что $\frac{PO}{a} = \frac{AP}{AB}$. Значит, $\frac{PO}{b} + \frac{PO}{a} = \frac{PB}{AB} + \frac{AP}{AB} = \frac{PB+AP}{AB} = \frac{AB}{AB} = 1$. Отсюда: $\frac{PO(a+b)}{ab} = 1$ и $PO = \frac{ab}{a+b}$.

Аналогично можно показать, что $OQ = \frac{ab}{a+b}$. Следовательно, $PQ = \frac{2ab}{a+b}$.

Отрезок PQ всегда расположен ближе к меньшему основанию, чем средняя линия (докажите самостоятельно), значит, выполняется неравенство $\frac{a+b}{2} > \frac{2ab}{a+b}$. Поскольку основания в трапеции не равны, то неравенство выполняется для $a \neq b$. Если же $a = b$, то среднее арифметическое этих чисел и их среднее гармоническое равны (проверьте это). Следовательно, для всех положительных чисел a и b выполняется нестрогое неравенство $\frac{a+b}{2} \geq \frac{2ab}{a+b}$.

Равенство достигается лишь в случае, когда $a = b$.

Среднее квадратичное. Помимо рассмотренных средних, в математике используется понятие среднего квадратичного:



для двух положительных чисел a и b среднее квадратичное равно квадратному корню из среднего арифметического квадратов этих чисел:

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

Все средние связаны неравенствами: $\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$.

Равенство достигается лишь в том случае, когда $a = b$. Если вы решите задачу 2, то эта красивая цепочка неравенств будет доказана.

1

На тренировке велосипедист трижды проехал кольцевую трассу. Первый круг он проехал со скоростью 30 км/ч, второй круг — со скоростью 24 км/ч, а третий — со скоростью 36 км/ч. Какова средняя скорость велосипедиста на всей дистанции? Ответ дайте с точностью до единиц.

2

В пункте 1.6 вы доказали, что среднее арифметическое двух чисел не меньше их среднего геометрического: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Докажите алгебраически, что:

- среднее геометрическое двух положительных чисел всегда не меньше их среднего гармонического;
- среднее квадратичное двух положительных чисел всегда не меньше их среднего арифметического.

ПОДВЕДЁМ ИТОГИ

Действительные числа

Рациональные и иррациональные числа вместе составляют множество действительных чисел.

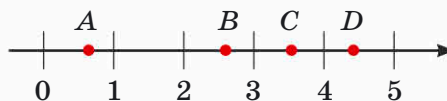
Любое действительное число может быть представлено в виде бесконечной десятичной дроби; всякая бесконечная десятичная дробь представляет некоторое действительное число.

$$\begin{aligned} N \subset Z \subset Q \subset R; \\ 5,2 \in Q, 5,2 \in R; \\ \pi \notin Q, \pi \in R. \end{aligned}$$

$$\frac{1}{4} = 0,25000...; \frac{5}{12} = 0,416666...;$$

$$\sqrt{3} = 1,73205080456... .$$

- 1 Выберите из чисел $0,34$; $-\frac{2}{3}$; 2π ; $-\sqrt{5}$; 12 ; $2 + \sqrt{3}$; $\frac{3}{7}$; -8 :
 а) целые числа; в) положительные рациональные числа;
 б) иррациональные числа; г) отрицательные действительные числа.
- 2 Сравните числа: а) $1\frac{3}{7}$ и $1,429$; б) $6,2$ и 2π .
- 3 Расположите в порядке возрастания числа: $\frac{7}{6}$; $1,16$; $1,1601$.
- 4 Соотнесите числа $2\sqrt{5}$; $\sqrt{7}$; $\sqrt{0,5}$ и $3,5$ с точками координатной прямой.



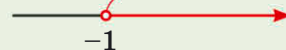
Неравенства и системы неравенств

Уравнения/неравенства, у которых множества решений совпадают, называют **равносильными**.

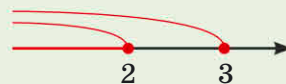
Неравенство, равносильное данному, получается, если:

- перенести член неравенства из одной части в другую с противоположным знаком;
- умножить обе части неравенства на положительное число;
- умножить обе части неравенства на отрицательное число и поменять знак неравенства на противоположный.

$$\begin{aligned} 1) \text{ Решим неравенство } 2 - 5x < 7. \\ -5x < 7 - 2; \\ -5x < 5; \\ x > -1. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 2) \text{ Решим систему неравенств } \\ \begin{cases} 5 - x \geq 3, \\ 2x \leq 6. \end{cases} \end{aligned}$$



$$\begin{cases} -x \geq -2, \\ x \leq 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 2, \\ x \leq 3. \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty; 2]$.

- 5 Запишите с помощью букв и сформулируйте свойства неравенств.
- 6 О числах a и c известно, что $a < c$. Какие из следующих неравенств не следуют из этого условия?
 1) $a - 0,7 < c - 0,7$; 2) $-10a < -10c$; 3) $\frac{1}{3}a < \frac{1}{3}c$; 4) $2a + 1 < 2c + 1$;
 5) $1 - a < 1 - c$.

7 Оцените площадь и периметр участка земли прямоугольной формы со сторонами a м и b м, если $10 < a < 11$, $7 < b < 8$.

8 Решите неравенство и изобразите множество его решений на координатной прямой:

а) $1 - 5x > -4$; в) $2x - 5(x - 3) < 16 - 6x$;

б) $4 - 3x \leq x + 16$; г) $\frac{1-x}{7} + \frac{2-x}{3} \geq 1$.

9 Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 2x - 18 < 0, \\ 5x < 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - 1 \geq 5x - 1, \\ 9x + 15 \geq 5 - x; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 7 - x > 0, \\ x + 2 < 3x - 16. \end{cases}$

10 Найдите множество решений двойного неравенства: $2 < 5x - 3 < 7$.

«Больше» и «меньше» с алгебраической точки зрения:

● $a > b$ в том и только том случае, когда разность $a - b$ положительна;

● $a < b$ в том и только том случае, когда разность $a - b$ отрицательна.

Докажем, что при любых a и b верно неравенство $a^2 + b^2 \geq 2ab$.

Рассмотрим разность левой и правой частей: $a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2 \geq 0$. Следовательно, $a^2 + b^2 \geq 2ab$.

11 Докажите, что для любых чисел x и y верно неравенство $x(x + y) \geq y(x - y)$.

12 Докажите, что для положительных чисел a и b верно неравенство $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

Погрешности измерений

Слова «с точностью до...» означают погрешность, т.е. максимальное отклонение приближённого значения величины (a) от её истинного значения (x). Записывают: $x = a \pm h$ или $a - h \leq x \leq a + h$, где a — приближённое значение величины, h — погрешность приближения.

Отношение погрешности приближения к приблиённому значению величины характеризует *относительную погрешность* приближения. Обычно её выражают в процентах.

Запись $m = 10 \pm 0,05$ кг означает, что масса указана с точностью до 0,05 кг, т.е. точное значение массы не менее 9,95 кг и не более 10,05 кг, или:

$$9,95 \text{ кг} \leq m \leq 10,05 \text{ кг}.$$

Относительная погрешность приближённого значения массы составляет $\frac{0,05}{10} = 0,005$, или 0,5 %.

13 Масса молока в пакете равна 500 г с точностью до 10 г. Запишите эту информацию с помощью знака « $\pm$ » и с помощью двойного неравенства.

14 Плотность железа по данным таблицы плотности металлов равна 7,87 г/см³. Какова погрешность приведённого значения плотности? Запишите это с помощью знака « $\pm$ » и с помощью двойного неравенства.

15 Определите, какова относительная погрешность приведённого значения плотности железа.

ГЛАВА 2

КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ

- КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ И ЕЁ ГРАФИК
- ГРАФИК И СВОЙСТВА ФУНКЦИИ $y = ax^2$
- СДВИГ ГРАФИКА ФУНКЦИИ $y = ax^2$ ВДОЛЬ ОСЕЙ КООРДИНАТ
- ГРАФИК ФУНКЦИИ $y = ax^2 + bx + c$
- КВАДРАТНЫЕ НЕРАВЕНСТВА
- МЕТОД ИНТЕРВАЛОВ

Узнайте больше

- ☐ ГРАФИК ДРОБНО-ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ
- ☐ ГРАФИКИ УРАВНЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ МОДУЛИ

ПАФНУТИЙ ЧЕБЫШЁВ

Великий русский математик, основоположник петербургской математической школы Пафнутий Львович Чебышёв известен прежде всего своим вкладом в теорию чисел и в теорию вероятностей, где его имя носят центральная предельная теорема и закон больших чисел. Он также основал математическую теорию синтеза механизмов и разработал на практике ряд уникальных механизмов.

Принимая активное участие в работе военного артиллерийского ведомства, он применил методы теории вероятностей для увеличения точности и дальности стрельбы. В баллистике и сегодня применяется формула Чебышёва для вычисления дальности полёта снаряда в зависимости от начальных условий. Многие механизмы Чебышёва нашли применение в современном приборостроении и автомобилестроении.

Среди созданных Чебышёвым механизмов есть и уникальная «стопоходящая машина», имитирующая ходьбу животного. Она пользовалась большим успехом в 1878 г. на Всемирной выставке в Париже, а теперь хранится в Политехническом музее в Москве.

2.1

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Какую функцию называют квадратичной функцией.
- Как построить график квадратичной функции, описать её свойства.

Примеры квадратичной функции

$$y = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 4$$

$$y = 0,5x^2 - 2x$$

$$y = x^2 - 3$$

$$y = -2x^2$$

КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ И ЕЁ ГРАФИК

Средством для описания на математическом языке зависимостей из самых различных областей знаний служит понятие функции. В 8 классе вы познакомились с этим важным понятием математики, узнали некоторые общие свойства функций, приобрели опыт работы с графиками функций. Вы начали изучать специальные классы функций. Это прежде всего *степенные* функции, такие, как $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$ (иначе $y = x^{\frac{1}{2}}$), $y = \frac{1}{x}$ (иначе $y = x^{-1}$). Вы подробно познакомились с *линейной* функцией $y = kx + l$, где k и l — числа. Теперь вам предстоит изучить квадратичную функцию — узнать её свойства и особенности графика, алгоритм его построения, увидеть примеры практического применения квадратичной функции.

КАКУЮ ФУНКЦИЮ НАЗЫВАЮТ КВАДРАТИЧНОЙ С квадратичной функцией вам уже приходилось иметь дело при работе с некоторыми формулами на уроках геометрии и физики. Так, формула $S = \pi r^2$ задаёт площадь круга S как квадратичную функцию его радиуса r ; формула $h = h_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2}$ задаёт высоту, на которой находится тело, брошенное вертикально вверх с высоты h_0 с начальной скоростью v_0 , как квадратичную функцию времени движения t .



Квадратичной функцией называют функцию, которую можно задать формулой вида $y = ax^2 + bx + c$, где a , b и c — некоторые числа, причём $a \neq 0$.

Правая часть формулы $y = ax^2 + bx + c$ — это хорошо знакомый вам квадратный трёхчлен. Он, как вы знаете, необязательно должен состоять из трёх слагаемых. Главное, чтобы присутствовало слагаемое, содержащее квадрат независимой переменной.



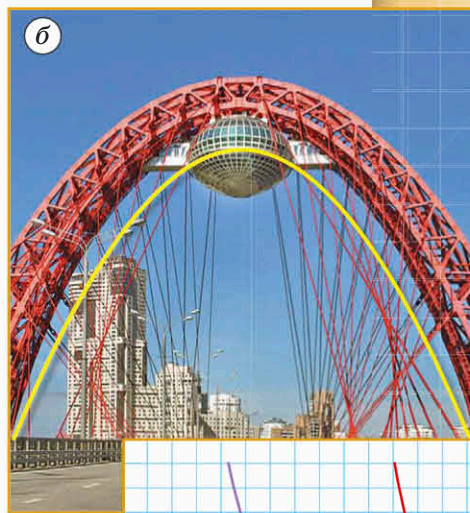
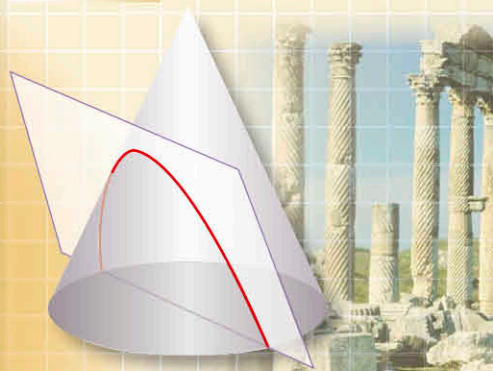
Степенные функции с натуральным показателем, линейная и квадратичная функции — это функции, задаваемые с помощью многочленов. Многочлены — основное средство вычислительной математики, в которой рассматриваемую функциональную зависимость стараются заменить близким к ней многочленом, т.е. аппроксимировать. Главное достоинство многочленов с позиции вычислительной математики состоит в их простоте: для вычисления их значений требуются лишь три основных арифметических действия — сложение, вычитание и умножение.

ГРАФИК КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ В 7 классе вы познакомились с графиком простейшей квадратичной функции $y = x^2$. Линия — график этой функции — называется *параболой*. На самом деле параболой является график любой квадратичной функции.

Увидели параболу ещё математики Древней Греции, когда, занимаясь геометрией, изучали конические сечения. Если конус расрезать плоскостью, параллельной образующей, то в сечении получится парабола (рис. 2.1).

Параболу вы часто можете наблюдать в реальной жизни как траекторию движения какого-либо тела или инженерную конструкцию.

Рис. 2.1



а) Фонтан в Александровском саду в Санкт-Петербурге. Струя фонтана «рисует» линию, близкую к параболе.

б) Мост на проспекте Маршала Жукова в Москве похож на параболу

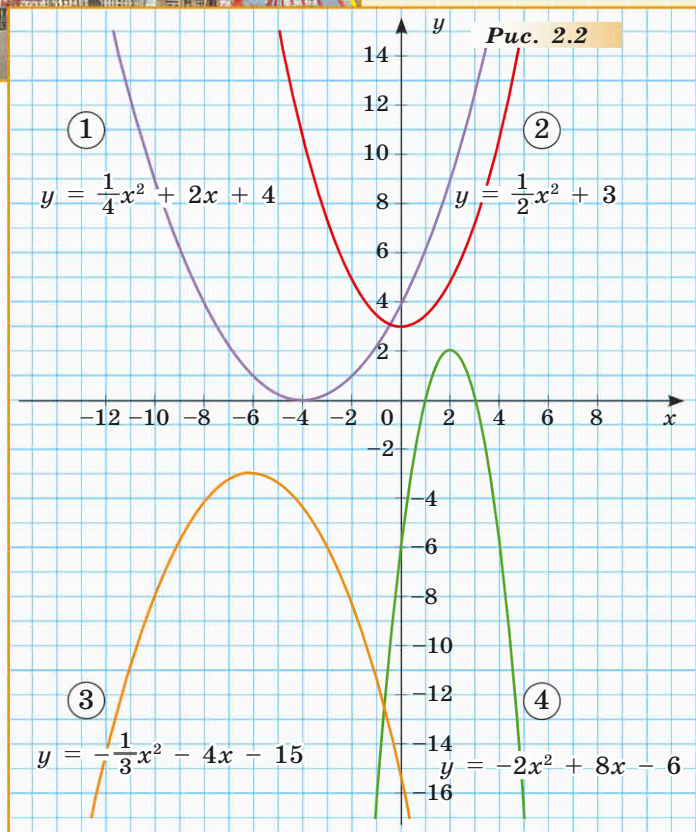
Посмотрите на параболы — графики квадратичных функций, изображённые на рисунке 2.2. Эти параболы по-разному расположены на координатной плоскости.

У одних парабол ветви направлены вверх, у других — вниз.

Каждая парабола имеет *ось симметрии* и *вершину*.

Ось симметрии — прямая, параллельная оси y , или сама ось y ; вершина — это точка, в которой ось симметрии пересекает параболу. Вершина может быть самой верхней или самой нижней точкой параболы (в зависимости от того, куда направлены её ветви). Различаются эти параболы не только направлением ветвей, но и степенью «крутизны». Самая «пологая» из них парабола — график 1 (функция $y = \frac{1}{4}x^2 + 2x + 4$); самая «крутая» парабола — график 4 (функция $y = -2x^2 + 8x - 6$).

Рис. 2.2



Построим график функции $y = x^2 - 2x - 3$. Для этого вычислим координаты нескольких точек этого графика:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	12	5	0	-3	-4	-3	0	5	12

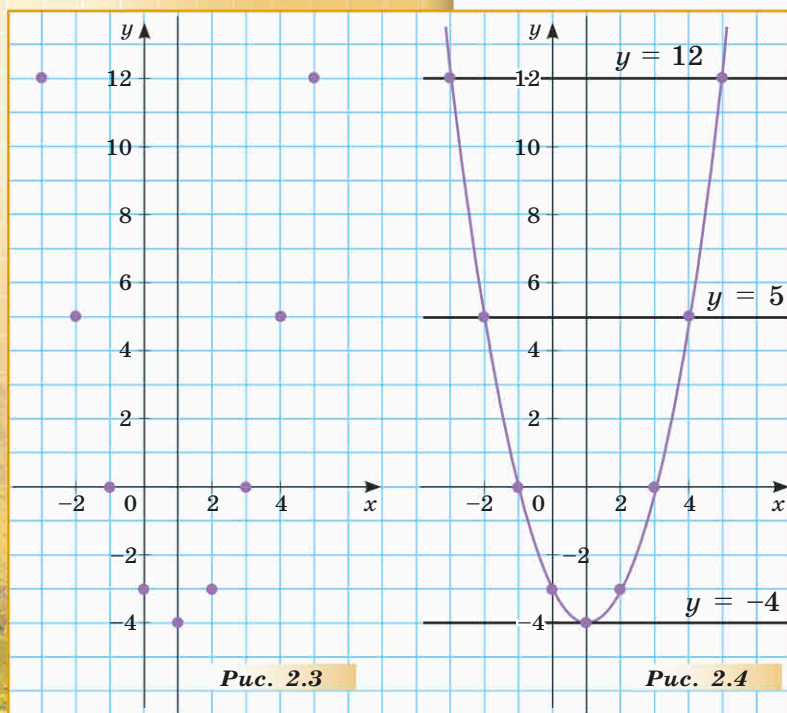


Рис. 2.3

Рис. 2.4

Отметим в координатной плоскости точки, координаты которых указаны в таблице (рис. 2.3), и соединим их плавной линией (рис. 2.4). Получим параболу, которая и является графиком функции $y = x^2 - 2x - 3$.

Осью симметрии построенной параболы служит вертикальная прямая $x = 1$, а вершиной — точка с координатами $x = 1$, $y = -4$. В вершине параболы касается горизонтальной прямой $y = -4$. Точка $(1; -4)$ — самая нижняя точка параболы. Переходя на алгебраический язык, можно сказать, что при $x = 1$ функция $y = x^2 - 2x - 3$ принимает наименьшее значение, равное -4 ; пишут: $y_{\text{наим.}} = -4$.

Ветви параболы неограниченно уходят вверх. Они пересекают любую горизонтальную прямую, расположенную выше прямой $y = -4$, в двух симметричных точках. Так, ось x параболы пересекает в точках $(-1; 0)$ и $(3; 0)$, прямую $y = 5$ в точках $(-2; 5)$ и $(4; 5)$, прямую $y = 12$ в точках $(-3; 12)$ и $(5; 12)$. Эти точки мы непосредственно видим на графике.

А как доказать, что параболa $y = x^2 - 2x - 3$ пересекает, к примеру, прямую $y = 21$? Чтобы ответить на поставленный вопрос, перейдём с геометрического языка на алгебраический. Задача состоит в том, чтобы доказать, что функция $y = x^2 - 2x - 3$ принимает значение, равное 21. Для этого решим уравнение $x^2 - 2x - 3 = 21$, т.е. $x^2 - 2x - 24 = 0$. Имеем: $x_1 = -4$, $x_2 = 6$.

Таким образом, функция $y = x^2 - 2x - 3$ принимает значение, равное 21, дважды — при $x = -4$ и $x = 6$. Значит, график этой функции пересекает прямую $y = 21$ в двух симметричных точках $(-4; 21)$ и $(6; 21)$.

Симметричные точки параболы лежат на одной и той же горизонтали, поэтому они имеют одинаковые ординаты. Сравните, к примеру, координаты найденных точек параболы $y = x^2 - 2x - 3$: $(-1; 0)$ и $(3; 0)$, $(-2; 5)$ и $(4; 5)$, $(-3; 12)$ и $(5; 12)$, $(-4; 21)$ и $(6; 21)$.



ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБЛАСТЬ ЗНАЧЕНИЙ КВАДРАТИЧНОЙ

ФУНКЦИИ

Чтобы задать функцию, необходимо знать способ вычисления её значений, а также область определения. Напомним, что *областью определения функции* называется множество значений аргумента этой функции. Так как значение квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ можно вычислить для любого x , то областью определения квадратичной функции в общем случае служит множество всех чисел. Так, областью определения функции $y = x^2 - 2x - 3$ служит промежуток $(-\infty; +\infty)$. Если же формула описывает какой-либо реальный процесс, то область определения такой функции может быть уже.

Пример. Пусть мяч подбросили вертикально вверх с высоты 1,5 м, придав ему начальную скорость 10 м/с. Тогда высота h (м), на которой находится мяч, есть квадратичная функция времени полёта t (с) при $g \approx 10 \text{ м/с}^2$:

$$h = 1,5 + 10t - 5t^2.$$

График этой функции — часть параболы (рис. 2.5). Функция определена не на множестве всех действительных чисел, а на отрезке. Его правый конец можно вычислить, решив уравнение $1,5 + 10t - 5t^2 = 0$. Получим $t = 1 + \sqrt{1,3} \approx 2,14$.

Все значения, которые принимает функция, образуют *область значений функции*. Область значений функции легко найти по её графику. Для этого достаточно спроецировать график на ось y . Например, областью значений функции $y = x^2 - 2x - 3$ (рис. 2.4) является промежуток $[-4; +\infty)$.

ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПАРАБОЛОИДА

Представьте, что парабола вращается вокруг собственной оси. Тело, которое при этом образуется, называют *параболоидом*. Если сделать внутреннюю поверхность параболоида зеркальной и вдоль его оси направить на это зеркало свет, то лучи, отражаясь от поверхности, соберутся в одной точке — фокусе.

Это свойство широко используется в технике, в параболических зеркалах, которые можно рассматривать как часть параболоида, получаемую отсечением его «бесконечной части» плоскостью, перпендикулярной его оси. Если такое параболическое зеркало направить на солнце, то температура в фокусе окажется столь высокой, что можно будет, например, вскипятить воду. Кстати, слово «фокус» в переводе с латыни означает «очаг».



Параболические антенны предназначены для приёма или передачи сигналов космической радиосвязи

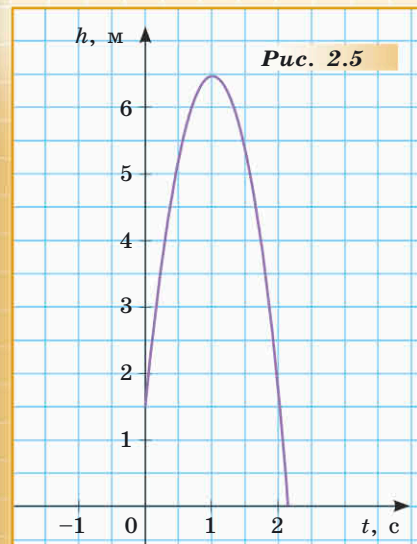


Рис. 2.5

Кривая на рисунке 2.5 — это не траектория полёта. Мяч движется прямолинейно. А часть параболы показывает изменение высоты мяча над поверхностью земли по мере его подъёма вверх и падения вниз. По графику видно, что мяч взлетел примерно на 6,5 м и после двух с небольшим секунд полёта упал на землю.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

Какие из следующих функций являются квадратичными:

$$y = 2x^2 - 5x + 1; y = (x - 4)^2; y = 7x + 3; y = 1 - 2x + x^2; y = \frac{x^2}{10}; y = \frac{10}{x^2}; y = x^3 + 3x^2 + x; y = \sqrt{x^2}; y = -0,5x^2$$

Опишите параболу $y = x^2 - 2x - 3$ (рис. 2.4), указав уравнение её оси симметрии, координаты вершины, направление ветвей, координаты точек пересечения с осями координат. В каких точках эта парабола пересекает прямую $y = 32$?

УПРАЖНЕНИЯ

СТРОИМ ГРАФИК КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ

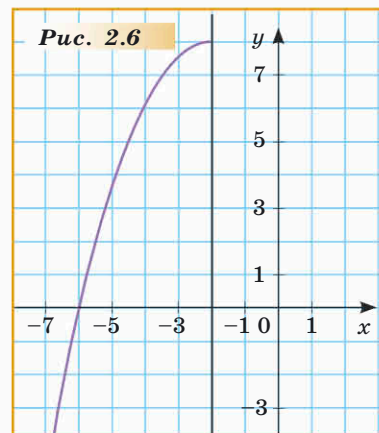
112

Для каждой параболы (рис. 2.2) укажите: направление ветвей, уравнение оси симметрии, координаты вершины. Покажите на графике точку его пересечения с осью y и симметричную ей точку. Запишите координаты отмеченных точек. Укажите на графике ещё одну пару симметричных точек и запишите их координаты.

113

На рисунке 2.6 изображена часть параболы (графика некоторой квадратичной функции) и её ось симметрии. Запишите уравнение оси симметрии. Перенесите рисунок в тетрадь и достройте параболу. Укажите направление ветвей параболы. Ответьте на вопросы:

- 1) Каковы координаты вершины параболы?
- 2) Чему равно значение y при значении x , равном -4 ; 1 ; 3 ?
- 3) При каких значениях x значение y равно 0 ; 3 ; -3 ?



114

Составьте таблицу значений функции и постройте график (проследите за тем, чтобы на графике была вершина и было видно направление ветвей):

а) $y = x^2 - 5x + 4$; в) $y = x^2 - 6x + 5$;
 б) $y = -x^2 + 2x + 3$; г) $y = -0,5x^2 + 2x$.

В каждом случае ответьте на вопросы:

- 1) Имеет ли функция наименьшее или наибольшее значение и чему оно равно? При каком x функция принимает это значение?
- 2) Пересекает ли график функции прямую $y = 10$?



115

МАТЕМАТИКА ВОКРУГ НАС С двухметровой высоты под углом к горизонту выпущена сигнальная ракета. Изменение высоты её полёта h (м) в зависимости от времени движения t (с) описывается формулой $h = 2 + 21t - 5t^2$. График функции $h = f(t)$ изображён на рисунке 2.7. Используя график, ответьте на вопросы:

- 1) В какое время ракета поднимется на высоту 20 м и в какое время она окажется на той же высоте при спуске?
- 2) На какой высоте ракета будет через 3,5 с полёта? Через сколько секунд после начала полёта ракета уже была на той же высоте?
- 3) Укажите наибольшую высоту подъёма ракеты. Сколько времени потребовалось ракете, чтобы подняться на максимальную высоту?
- 4) Как вы думаете, почему график не доведён до пересечения с осью x ?

116

Если известны две симметричные точки параболы, то легко найти её ось симметрии, а значит, и абсциссу вершины. На этом может быть основан *алгоритм построения графика квадратичной функции*.

Постройте график функции $y = x^2 - x - 6$, пользуясь следующим планом:

- 1) вычислите координаты точек пересечения параболы с осью x и отметьте эти точки в координатной плоскости;
- 2) проведите ось симметрии параболы;
- 3) найдите абсциссу вершины и вычислите ординату вершины параболы;
- 4) отметьте вершину в координатной плоскости;
- 5) вычислите координаты ещё каких-нибудь точек параболы и отметьте их в координатной плоскости;
- 6) соедините точки плавной линией.

117

Постройте график функции, воспользовавшись планом, предложенным в предыдущем упражнении:

- а) $y = 2x^2 - 2x - 12$; б) $y = -2x^2 + 6x$.

118

Постройте график функции: а) $y = x^2 + 4x + 7$; б) $y = -2x^2 + 4x - 4$.

При построении воспользуйтесь следующим планом:

- 1) найдите пару симметричных точек параболы, взяв, например, в качестве одной из них точку пересечения с осью y ;
- 2) далее действуйте по плану, приведённому в упр. 116, начиная с пункта 2. Как вы думаете, почему в данном случае пункт 1 был заменён? Предложите ещё какой-нибудь способ нахождения координат симметричных точек параболы.

РАБОТАЕМ С ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ СИМВОЛИКОЙ

119

Квадратичная функция задана формулой $f(x) = 2x^2 - x - 15$.

- 1) Найдите $f(3)$, $f(0)$, $f(-3)$, $f(-2,5)$.
- 2) Найдите значения аргумента, при которых $f(x) = 0$, $f(x) = -5$.
- 3) Существуют ли значения x , при которых $f(x) = -20$?

120

Дана функция $y = g(x)$, где $g(x) = -2x^2 + 4x - 5$. Запишите в математических обозначениях утверждение и проверьте, верно ли оно:

- 1) график функции проходит через точку $(-1; -3)$;
- 2) график функции пересекает ось y в точке, ордината которой равна -5 ;
- 3) при $x = 0$ и $x = 2$ функция принимает равные значения;
- 4) при $x = 3$ значение функции больше, чем при $x = 4$.

121

Найдите на рисунке 2.2 график функции $y = g(x)$, где $g(x) = -2x^2 + 8x - 6$.

- 1) Верно ли, что $g(2) > 0$, $g(-1) < 0$, $g(3,5) > 0$?
- 2) Укажите несколько значений x , при которых $g(x) > 0$, $g(x) < 0$.

122

Найдите нули функции $y = f(x)$ или покажите, что их нет:

- а) $f(x) = x^2 - 7x + 10$; в) $f(x) = 2x^2 - 8x - 8$;
б) $f(x) = -x^2 + 5x - 7$; г) $f(x) = 6x^2 - 5x + 1$.

В каждом случае опишите полученный результат на геометрическом языке.

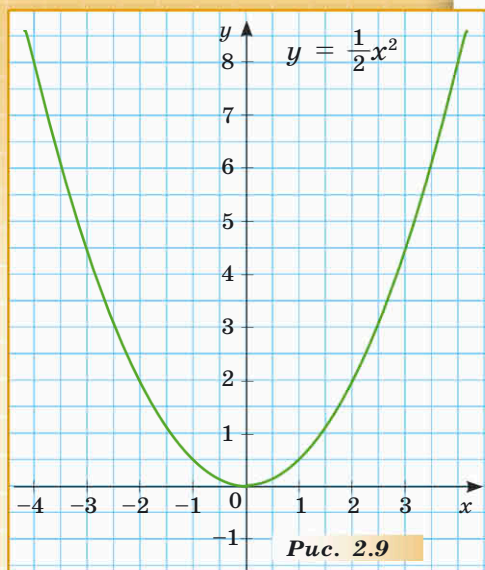
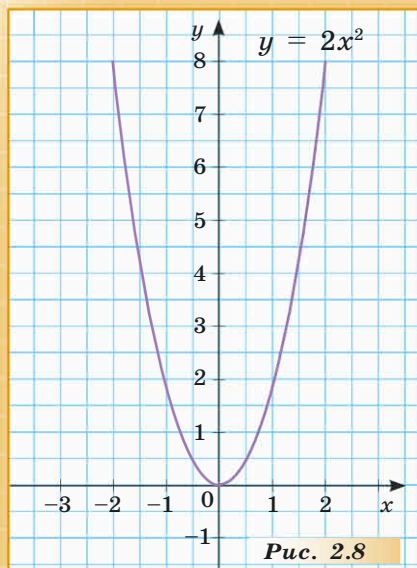
123

Задайте формулой какую-нибудь квадратичную функцию, нулями которой являются числа -1 и 3 , и постройте её график по плану, предложенному в упражнении 116.

2.2

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Как изобразить схематически график функции $y = ax^2$.
- Свойства квадратичной функции $y = ax^2$.

ГРАФИК И СВОЙСТВА
ФУНКЦИИ $y = ax^2$

До сих пор вы строили график квадратичной функции по точкам, подбирая их так, чтобы в достаточной степени была «обрисована» парабола. Однако при таком способе действий надо следить за тем, чтобы все выбранные точки не оказались на одной ветви параболы и среди них была такая характерная точка, как вершина. Поэтому теперь мы займёмся более детальным изучением квадратичной функции, её свойств, особенностей графика и познакомимся с некоторыми приёмами, облегчающими построение параболы.

ГРАФИК ФУНКЦИИ $y = ax^2$ Выясним, какая существует связь между коэффициентом a и особенностями графика функции $y = ax^2$.

Рассмотрим сначала случай, когда $a > 0$.

При $a = 1$ получаем знакомую формулу $y = x^2$. Возьмём другие значения a , например $a = 2$ и $a = \frac{1}{2}$, и рассмотрим функции $y = 2x^2$ и $y = \frac{1}{2}x^2$. Составим таблицы значений этих функций:

$$y = 2x^2$$

x	-2	-1,5	-1	0	1	1,5	2
y	8	4,5	2	0	2	4,5	8

$$y = \frac{1}{2}x^2$$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	8	4,5	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	4,5	8

На рисунках 2.8 и 2.9 построены графики функций $y = 2x^2$ и $y = \frac{1}{2}x^2$. Это параболы, у которых, как и у графика $y = x^2$, ветви направлены вверх, вершиной служит начало координат, а осью симметрии — ось y . Такими же особенностями обладает график любой квадратичной функции $y = ax^2$ при $a > 0$.

Мы видим, что, чем больше коэффициент a , тем больше «крутизна» параболы. Разная «крутизна» графиков говорит о том, что быстрее меняется функция $y = 2x^2$, а медленнее — $y = \frac{1}{2}x^2$.

Рассмотрим теперь случай, когда $a < 0$.

Составим таблицу значений функции $y = -\frac{1}{2}x^2$:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-8	-4,5	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-2	-4,5	-8

На рисунке 2.10 изображена парабола, которая является графиком этой функции. Её вершиной, как и у парабол, рассмотренных выше, служит начало координат, осью симметрии — ось y , однако ветви этой параболы направлены вниз.

Вы, конечно, поняли, как связаны между собой функции $y = \frac{1}{2}x^2$ и $y = -\frac{1}{2}x^2$: при любом x их значения — противоположные числа. Чтобы получить из графика функции $y = \frac{1}{2}x^2$ график функции $y = -\frac{1}{2}x^2$, нужно каждую точку первого графика заменить точкой с такой же абсциссой, но с противоположной ординатой, т.е. точкой, симметричной точке первого графика относительно оси x . Иными словами, эти графики симметричны относительно оси x (рис. 2.11).

Таким образом:

графиком квадратичной функции вида $y = ax^2$, где $a \neq 0$, является парабола с вершиной в начале координат; её осью симметрии служит ось y ; при $a > 0$ ветви параболы направлены вверх, при $a < 0$ ветви параболы направлены вниз.

СВОЙСТВА ФУНКЦИИ $y = ax^2$ Зная, как выглядит график функции $y = ax^2$, мы можем выяснить некоторые её свойства. Сформулируем сначала свойства функции $y = ax^2$ при $a > 0$.

№	Особенности графика	Свойства функции
1	График касается оси x в начале координат: точка $O(0; 0)$ — нижняя точка графика	При $x = 0$ функция принимает наименьшее значение, равное 0
2	Ветви параболы неограниченно уходят вверх; они пересекают любую горизонтальную прямую, расположенную выше оси x	Любое неотрицательное число является значением функции. Область значений функции — промежуток $[0; +\infty)$
3	График симметричен относительно оси y	Противоположным значениям аргумента соответствуют равные значения функции
4	На промежутке $(-\infty; 0]$ график «идёт» вниз; на промежутке $[0; +\infty)$ график «идёт» вверх	На промежутке $(-\infty; 0]$ функция убывает; на промежутке $[0; +\infty)$ функция возрастает

При $a < 0$ свойства функции $y = ax^2$ будут несколько иными. В самом деле, симметрия относительно оси x меняет полуплоскость, в которой расположен график, на противоположную. При этом меняется на противоположный знак функции; промежуток убывания превращается в промежуток возрастания, и наоборот; вместо наименьшего значения функции появляется наибольшее. Предлагаем вам самостоятельно сформулировать свойства функции $y = ax^2$ при $a < 0$.

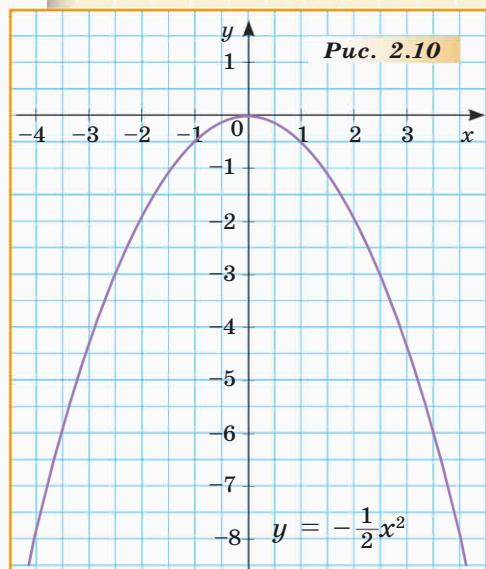


Рис. 2.10

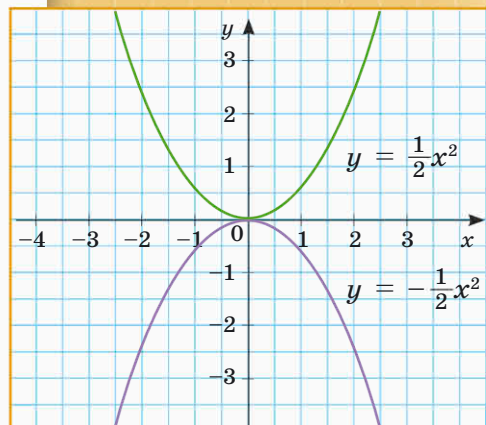


Рис. 2.11

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

Изобразите схематически в одной координатной плоскости графики функций

$$y = -x^2, y = -\frac{1}{2}x^2 \text{ и } y = -2x^2.$$

О чём говорит разная «крутизна» графиков?

Опираясь на рисунок 2.9, опишите свойства функции $y = ax^2$ при $a > 0$. (Проверьте себя по таблице.)

Опираясь на рисунок 2.10, опишите свойства функции $y = ax^2$ при $a < 0$.

УПРАЖНЕНИЯ

СТРОИМ ГРАФИКИ ФУНКЦИЙ ВИДА $y = ax^2$

124

Функция задана формулой $y = 3x^2$.

- 1) Составьте таблицу значений функции при x , равном 0; $\frac{1}{3}$; 1; 2, и постройте её график.
- 2) Отметьте на графике пару симметричных точек и укажите их координаты.
- 3) В каких точках график пересекает прямую $y = 48$? $y = 75$?

125

1) В одной системе координат постройте график функции $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ и график функции $g(x) = -\frac{1}{4}x^2$.

2) Вычислите значение выражения $f(10)$. Чему равно значение выражения $g(10)$?

3) График какой из функций — $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ или $g(x) = -\frac{1}{4}x^2$ — пересекает прямую $y = 100$? $y = -100$? Укажите координаты точек пересечения.

4) На промежутке $[-4; 2]$ укажите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = \frac{1}{4}x^2$; наибольшее и наименьшее значения функции $g(x) = -\frac{1}{4}x^2$.

126

Длина окружности l вычисляется по формуле $l = 2\pi r$, а площадь круга S — по формуле $S = \pi r^2$, где r — радиус. Постройте график зависимости:

а) длины окружности от радиуса; б) площади круга от радиуса.

(Считайте, что $\pi \approx 3$.)

АНАЛИЗИРУЕМ ГРАФИКИ ФУНКЦИЙ ВИДА $y = ax^2$

127

Изобразите схематически в одной и той же системе координат графики функций: $y = 0,3x^2$; $y = -10x^2$; $y = 8x^2$; $y = -0,1x^2$.

- 1) Какая из парабол самая «крутая»? самая «пологая»?
- 2) Какие из функций имеют наименьшее значение? наибольшее значение?
- 3) Укажите промежутки убывания и промежутки возрастания функций $y = 8x^2$ и $y = -0,1x^2$.

128

На рисунке 2.12 даны графики квадратичных функций, заданных формулами:

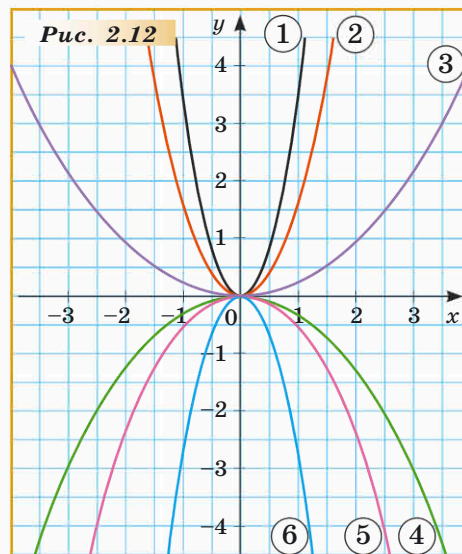
$$y = 3,2x^2; y = -0,6x^2; y = 1,6x^2; y = -2,5x^2; y = -\frac{1}{3}x^2; y = \frac{1}{4}x^2.$$

Соотнесите каждый из них с одной из формул.

129

Известно, что график квадратичной функции, заданной формулой вида $y = ax^2$, проходит через точку $C(-6; -9)$.

- 1) Укажите координаты точки графика, которая симметрична точке C .
- 2) Найдите коэффициент a .
- 3) Укажите координаты каких-нибудь двух точек, одна из которых принадлежит графику, а другая нет.



130

Используя схематический график, сравните значения выражений:

а) $5 \cdot (-17)^2$ и $5 \cdot (-7)^2$; б) $-2 \cdot 91^2$ и $-2 \cdot 19^2$; в) $-4 \cdot 1,5^2$ и $-4 \cdot (-1,5)^2$.

131

Укажите координаты какой-либо точки графика функции $y = 20x^2$, расположенной:

а) выше прямой $y = 1000$;

б) ниже прямой $y = 800$;

в) выше прямой $y = 1200$ и ниже прямой $y = 1500$.

СТРОИМ ГРАФИКИ РАЗНЫХ ФУНКЦИЙ

132

В одной системе координат постройте графики функций и найдите координаты их точек пересечения:

а) $y = \frac{1}{2}x^2$ и $y = \frac{1}{2}x + 1$; б) $y = 2x^2$ и $y = -2x + 4$; в) $y = -2x^2$ и $y = -\frac{2}{x}$.

133

Постройте график функции:

а) $y = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \leq 0 \\ -x^2, & \text{если } x > 0 \end{cases}$; б) $y = \begin{cases} -2x^2, & \text{если } x < 0 \\ 2x^2, & \text{если } x \geq 0 \end{cases}$; в) $y = \begin{cases} 2x^2, & \text{если } x \leq 0 \\ -0,5x^2, & \text{если } x > 0 \end{cases}$.

Для каждой функции определите, является ли она возрастающей или убывающей.

134

Постройте график функции $y = \begin{cases} -x^2, & \text{если } x \leq 1 \\ x, & \text{если } x > 1 \end{cases}$.

Указание. График состоит из двух частей. Подумайте, какой части принадлежит точка с абсциссой, равной 1, и исключите «лишнюю» точку, показав её стрелкой.

135

Постройте график функции:

а) $y = \begin{cases} x + 3, & \text{если } x \leq 0 \\ 3x^2, & \text{если } x > 0 \end{cases}$; б) $y = \begin{cases} -2x^2, & \text{если } x < 0 \\ -x + 2, & \text{если } x \geq 0 \end{cases}$.

Для каждой функции ответьте на вопрос: имеет ли функция наименьшее значение? наибольшее значение?

136

В одной системе координат постройте графики функций:

а) $y = |x|$ и $y = -|x|$;

в) $y = x^3$ и $y = -x^3$;

б) $y = \sqrt{x}$ и $y = -\sqrt{x}$;

г) $y = \frac{2}{x}$ и $y = -\frac{2}{x}$.

137

ЗАДАЧА-ИССЛЕДОВАНИЕ

1) Постройте параболу $y = \frac{1}{4}x^2$.

2) В этой же системе координат проведите прямую d , уравнение которой $y = -1$, и отметьте точку $F(0; 1)$.

3) Отметьте на параболе несколько точек с целыми координатами и для каждой из них вычислите расстояния до точки F и до прямой d .

4) Докажите, что любая точка параболы $y = \frac{1}{4}x^2$ находится на одинаковом расстоянии от точки F и от прямой d .

Подсказка. Возьмите произвольную точку параболы $(x; \frac{1}{4}x^2)$. Составьте выражения для нахождения расстояний от этой точки до точки F и до прямой d .

2.3

ВЫ УЗНАЕТЕ:

● Как связано уравнение параболы $y = a(x + p)^2 + q$ с её расположением в координатной плоскости.

● Как построить график функции, заданной формулой вида

$$y = a(x + p)^2 + q.$$

СДВИГ ГРАФИКА ФУНКЦИИ $y = ax^2$ ВДОЛЬ ОСЕЙ КООРДИНАТ

Если какую-нибудь параболу сдвинуть вдоль какой-либо из осей координат, то мы получим новую параболу, иначе расположенную в координатной плоскости. Главным будет вопрос: «Как при этом меняется уравнение параболы?»

СДВИГ ГРАФИКА ФУНКЦИИ $y = ax^2$ ВДОЛЬ ОСИ ОРДИНАТ

Возьмём график функции $y = x^2$ (рис. 2.13, а). Будем считать его твёрдым телом, сделанным, например, из проволоки. Сдвинем этот график вдоль оси y вверх на 2 единицы (рис. 2.13, б). Теперь вершиной параболы служит точка $(0; 2)$, а осью симметрии по-прежнему является ось y . Эта парабола — график некоторой новой функции. Каким уравнением можно задать эту функцию?

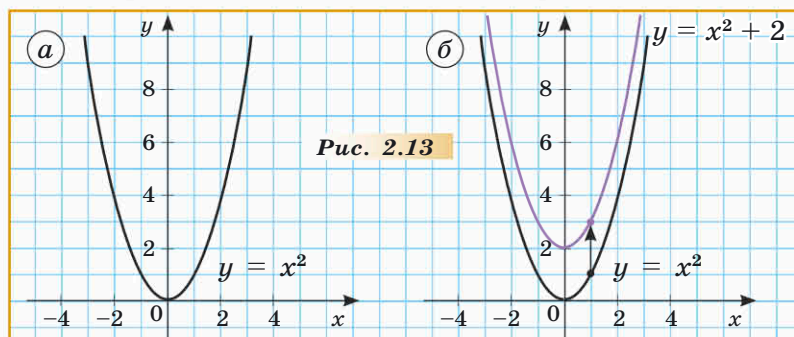


Рис. 2.13

Легко видеть, что при сдвиге графика на 2 единицы вверх абсцисса каждой его точки осталась прежней, а ордината увеличилась на 2. Это означает, что у новой параболы точка с абсциссой x имеет ординату, равную $x^2 + 2$.

Рассуждая так же, можно показать, что если график функции $y = 1,5x^2$ перенести вдоль оси y на 6 единиц вниз, то получим параболу, которую можно задать уравнением $y = 1,5x^2 - 6$ (рис. 2.14).

В каждом случае мы приходим к уравнению вида $y = ax^2 + q$, где q — ордината вершины новой параболы; число q положительное, если парабола $y = ax^2$ сдвигается вверх, и отрицательное, если она сдвигается вниз. Теперь понятно, как с помощью параболы $y = ax^2$ можно получить график функции $y = ax^2 + q$.

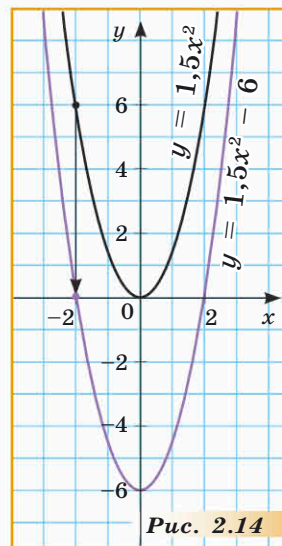


Рис. 2.14

Если график функции $y = -\frac{1}{4}x^2$ перенести на 4 единицы вниз, то получится парабола, которую можно задать уравнением $y = -\frac{1}{4}x^2 - 4$ (рис. 2.15).

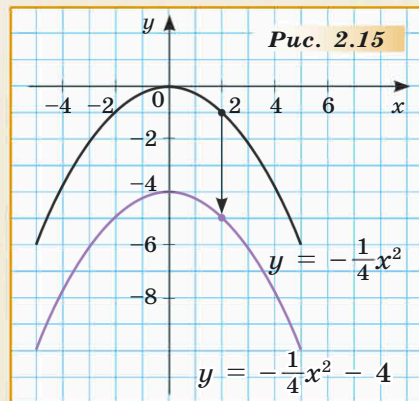


Рис. 2.15

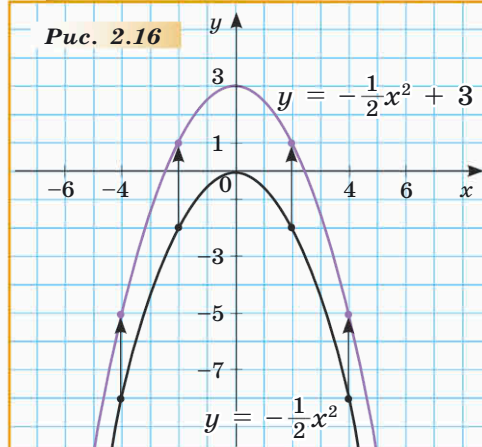
Чтобы построить график функции $y = ax^2 + q$, нужно перенести параболу $y = ax^2$ вдоль оси y вверх на отрезок длины q , если $q > 0$, или вниз на отрезок длины $|q|$, если $q < 0$. При этом вершина параболы окажется в точке $(0; q)$.

Пример 1. Построим график функции $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3$.

Этот график можно получить сдвигом на 3 единицы вверх графика функции $y = -\frac{1}{2}x^2$. Поэтому поступим следующим образом: построим параболу $y = -\frac{1}{2}x^2$, перенесём её вершину в точку $(0; 3)$, затем сдвинем ещё какие-либо две пары симметричных точек этой параболы на 3 единицы вверх и соединим их плавной линией. Эта линия и есть график функции $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3$ (рис. 2.16).

В то же время заметим, что вспомогательный график функции $y = -\frac{1}{2}x^2$ строить необязательно. Чтобы определить положение вершины и направление ветвей параболы $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3$, параллельный перенос параболы $y = -\frac{1}{2}x^2$ можно выполнить мысленно или схематично на бумаге. Наметив вершину, нужно затем по формуле $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3$ вычислить координаты ещё нескольких точек, например $(2; 1)$ и $(-2; 1)$, $(4; -5)$ и $(-4; -5)$, отметить их на координатной плоскости и провести через все отмеченные точки плавную линию.

Рис. 2.16



СДВИГ ГРАФИКА ФУНКЦИИ $y = ax^2$ ВДОЛЬ ОСИ АБСЦИСС

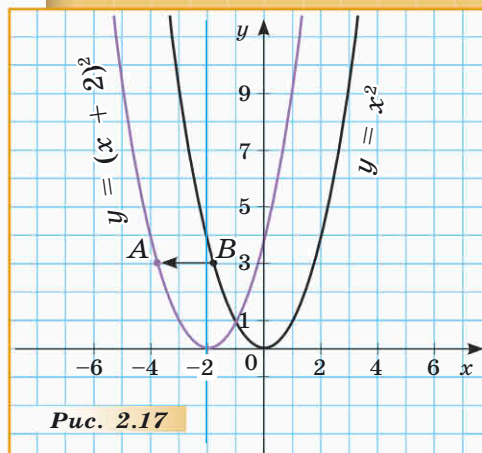
Возьмём параболу $y = x^2$. Сдвинем её вдоль оси x на 2 единицы влево (рис. 2.17). Теперь вершиной параболы служит точка $(-2; 0)$, а осью симметрии — прямая $x = -2$, параллельная оси y . Каким уравнением можно описать эту новую параболу? Ситуация здесь оказывается сложнее, чем при сдвиге вдоль оси ординат.

Итак, у нас есть график функции — сдвинутая влево парабола, и нам нужна формула, которой она задаётся. Другими словами, нам надо задать правило вычисления ординаты точки этого графика по её абсциссе.

Для этого возьмём произвольную точку A на сдвинутой параболе. Пусть её координаты равны x и y . Эта точка получена при сдвиге на 2 единицы влево точки B исходной параболы ($AB = 2$). Поэтому точка B имеет ту же ординату y , что и точка A , а её абсцисса на 2 больше, чем у точки A , т.е. она равна $x + 2$.

Но ордината каждой точки исходной параболы равна квадрату её абсциссы, так что $y = (x + 2)^2$. Следовательно, ордината y точки A вычисляется по её абсциссе по формуле $y = (x + 2)^2$ — это и есть искомая формула.

Рис. 2.17



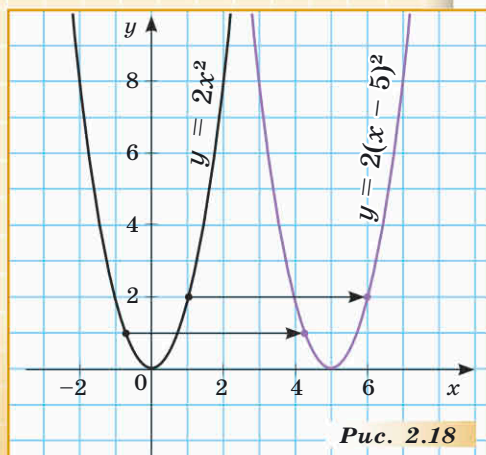


Рис. 2.18

Если график функции $y = -3x^2$ сдвинуть на 4 единицы влево, то получится парабола, которую можно задать уравнением $y = -3(x + 4)^2$ (рис. 2.19).

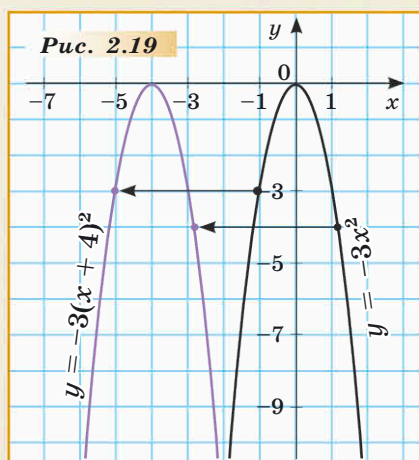


Рис. 2.19

Рассуждая так же, можно показать, что если график функции $y = 2x^2$ передвинуть вдоль оси x на 5 единиц вправо, то получившуюся параболу можно задать уравнением $y = 2(x - 5)^2$ (рис. 2.18).

В каждом случае мы приходим к уравнению вида $y = a(x + p)^2$, где p — число, противоположное абсциссе вершины параболы; число p положительное, если парабола $y = ax^2$ сдвигается влево, и отрицательное, если она сдвигается вправо. Отсюда ясно, как с помощью параболы $y = ax^2$ получить график функции $y = a(x + p)^2$.

Чтобы построить график функции $y = a(x + p)^2$, нужно перенести параболу $y = ax^2$ влево вдоль оси x на отрезок длины p , если $p > 0$, или вправо на отрезок длины $|p|$, если $p < 0$. При этом вершина параболы окажется в точке $(-p; 0)$.

Пример 2. Построим график функции $y = -\frac{1}{2}(x - 3)^2$.

Этот график можно получить сдвигом на 3 единицы вправо параболы $y = -\frac{1}{2}x^2$. Выполнив этот сдвиг мысленно или схематически на бумаге, выясним, каково положение параболы $y = -\frac{1}{2}(x - 3)^2$. В координатной плоскости её вершиной служит точка $(3; 0)$, осью симметрии — вертикальная прямая $x = 3$, а её ветви, как и у параболы $y = -\frac{1}{2}x^2$, направлены вниз (рис. 2.20, а).

Вычислим координаты ещё нескольких точек параболы, двигаясь влево и вправо от оси симметрии: $(1; -2)$ и $(5; -2)$, $(0; -4,5)$ и $(6; -4,5)$. Отметим эти точки в координатной плоскости и соединим все построенные точки плавной линией. Получим график функции $y = -\frac{1}{2}(x - 3)^2$ (рис. 2.20, б).

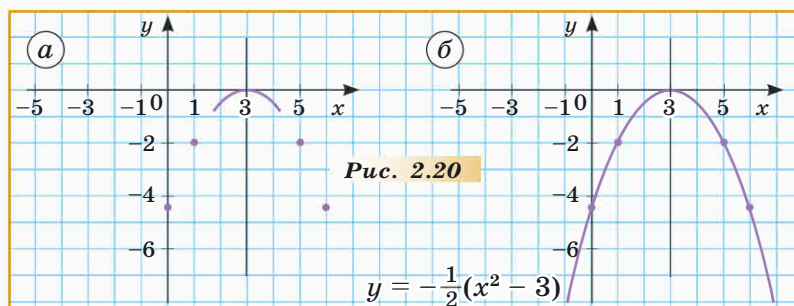


Рис. 2.20

СДВИГ ГРАФИКА ФУНКЦИИ $y = ax^2$ ВДОЛЬ ОСЕЙ КООРДИНАТ

Используя сдвиги параболы вдоль осей координат, можно строить и более сложные графики.

Пример 3. Построим график функции $y = 2(x + 1)^2 - 3$.

Будем действовать следующим образом:

1) построим параболу $y = 2x^2$;

2) перенесём её на 1 единицу влево — в результате получится график функции $y = 2(x + 1)^2$;

3) сдвинем построенный график на 3 единицы вниз — получится график заданной функции $y = 2(x + 1)^2 - 3$ (рис. 2.21).

Действия, которые мы выполнили для построения графика, можно описать такой схемой:

влево на 1 ед. вниз на 3 ед.
 $y = 2x^2 \longrightarrow y = 2(x + 1)^2 \longrightarrow y = 2(x + 1)^2 - 3$.

Параллельные переносы можно было бы выполнять и в другом порядке: сначала сдвинуть параболу $y = 2x^2$ на 3 единицы вниз — получился бы график функции $y = 2x^2 - 3$, а затем построенный график сдвинуть на 1 единицу влево — получился бы график функции $y = 2(x + 1)^2 - 3$:

вниз на 3 ед. влево на 1 ед.
 $y = 2x^2 \longrightarrow y = 2x^2 - 3 \longrightarrow y = 2(x + 1)^2 - 3$.

Теперь ясно, как с помощью параболы $y = ax^2$ получить график функции $y = a(x + p)^2 + q$.

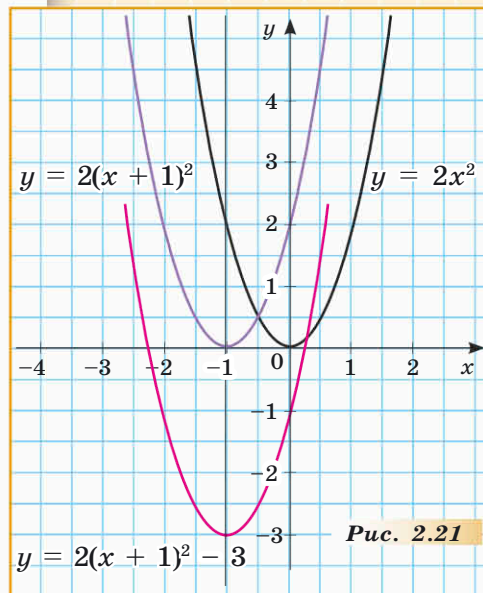


Рис. 2.21

График функции, заданной формулой

$$y = a(x + p)^2 + q,$$

можно получить из параболы $y = ax^2$ с помощью двух параллельных переносов: вдоль оси x на $|p|$ единиц — влево или вправо в зависимости от знака числа p и вдоль оси y на $|q|$ единиц — вверх или вниз в зависимости от знака числа q . Вершиной параболы $y = a(x + p)^2 + q$ будет точка $(-p; q)$.

Для получения графика функции $y = 2(x + 1)^2 - 3$ необязательно строить две промежуточные параболы. Можно, выполнив сдвиги вдоль координатных осей мысленно или схематично на бумаге, отметить в плоскости вершину параболы — точку $(-1; -3)$, провести через вершину ось симметрии графика, уточнить направление ветвей, а затем построить параболу по точкам.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СДВИГОВ ВДОЛЬ ОСЕЙ КООРДИНАТ ПРИ ПОСТРОЕНИИ ГРАФИКА ФУНКЦИИ $y = ax^2 + bx + c$

Вернёмся к формуле $y = 2(x + 1)^2 - 3$, рассмотренной в примере 3. Преобразуем правую часть этой формулы в многочлен: $2(x + 1)^2 - 3 = 2x^2 + 4x - 1$. Мы видим, что, по сути, был построен график функции $y = 2x^2 + 4x - 1$.



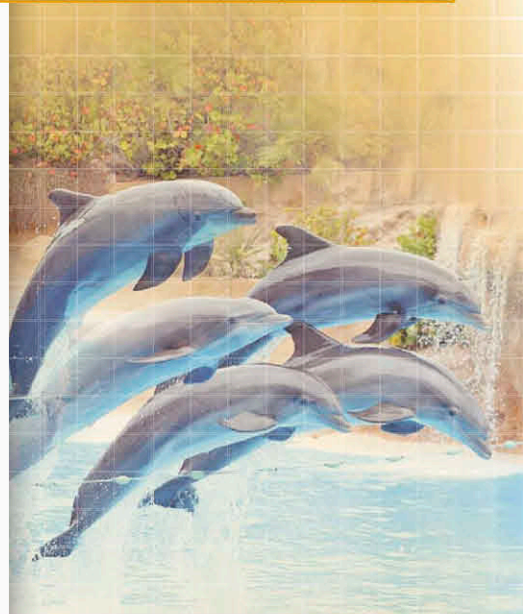
Этот вывод подсказывает нам, как надо действовать, если требуется построить график функции, заданной формулой вида $y = ax^2 + bx + c$. Нужно представить эту формулу в виде $y = a(x + p)^2 + q$ и выяснить, с помощью каких параллельных переносов можно построить график данной функции.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

Каково взаимное расположение в координатной плоскости парабол:

- а) $y = 0,5x^2$ и $y = 0,5x^2 + 2$;
- б) $y = 0,5x^2$ и $y = 0,5(x - 4)^2$?

Из какой параболы и какими преобразованиями может быть получена парабола $y = (x + 3)^2 - 1$? Укажите координаты её вершины. Опишите две схемы построения.



УПРАЖНЕНИЯ

СДВИГАЕМ ГРАФИК ФУНКЦИИ $y = ax^2$ ВДОЛЬ ОСИ ОРДИНАТ

138

Изобразите схематически график функции и задайте эту функцию формулой, если известно, что её график получен сдвигом вдоль оси y :

- а) параболы $y = 2x^2$ на 4 единицы вверх;
- б) параболы $y = \frac{1}{2}x^2$ на 5 единиц вниз;
- в) параболы $y = -x^2$ на 3 единицы вверх;
- г) параболы $y = -3x^2$ на 1,5 единицы вниз.

139

Назовите координаты вершины параболы, заданной уравнением:

- а) $y = x^2 + 10$; б) $y = -\frac{1}{4}x^2 - 1$; в) $y = -10x^2 + 1,5$; г) $y = 2x^2 - 4,8$.

140

Постройте график функции:

- а) $y = x^2 - 4$; б) $y = 0,5x^2 + 3$; в) $y = -x^2 + 1$; г) $y = -2x^2 - 1$.
- Для каждой функции укажите промежуток возрастания и промежуток убывания, а также наибольшее (или наименьшее) значение.

141

Постройте график функции на заданной области определения и укажите её наименьшее и наибольшее значения:

- а) $y = x^2 - 3$, где $-2 \leq x \leq 3$; б) $y = 4 - \frac{1}{4}x^2$, где $-4 \leq x \leq 2$.

142

Постройте параболу, заданную уравнением $y = x^2 + 2$.

Постройте параболу, симметричную данной относительно оси x , и задайте её уравнением.

143

При каких значениях коэффициента имеет хотя бы один нуль функция:

- а) $y = ax^2 + 7$; б) $y = 10x^2 + q$?

СДВИГАЕМ ГРАФИК ФУНКЦИИ $y = ax^2$ ВДОЛЬ ОСИ АБСЦИСС

144

Назовите координаты вершины параболы, заданной уравнением:

- а) $y = (x + 1)^2$; б) $y = 5(x - 3)^2$; в) $y = -(x - 1)^2$; г) $y = -2(x + 5)^2$.

145

Постройте график функции:

- а) $y = (x - 4)^2$; в) $y = -(x + 3)^2$;
- б) $y = 2(x + 2)^2$; г) $y = -0,5(x - 1)^2$.

Воспользуйтесь следующим планом:

- 1) найдите координаты вершины параболы и отметьте вершину в координатной плоскости;
- 2) проведите через вершину ось симметрии параболы;
- 3) покажите маленькой дугой направление ветвей параболы;
- 4) постройте несколько точек графика по разные стороны от оси симметрии;
- 5) соедините построенные точки параболы плавной линией.

146

Параболу $y = x^2$ сдвинули на несколько единиц вдоль оси x так, что она прошла через точку M . Запишите формулу, соответствующую новой параболе, если точка M имеет координаты: а) $(0; 4)$; б) $(-4; 4)$.

147

На рисунке 2.22 изображены графики функций:

$$y = 0,7x^2 + 1; \quad y = -0,7x^2 + 1;$$

$$y = 0,7(x - 1)^2; \quad y = -0,7(x - 1)^2.$$

Для каждого графика укажите соответствующую формулу.

СТРОИМ ГРАФИКИ ФУНКЦИЙ ВИДА $y = a(x + p)^2 + q$

148

Назовите координаты вершины параболы и укажите направление её ветвей:

а) $y = 3(x - 7)^2 + 1$;

в) $y = (x - 3)^2 - 4$;

б) $y = -2(x + 2)^2 + 8$;

г) $y = -(x + 5)^2 - 5$.

149

Постройте график функции. В качестве образца воспользуйтесь примером 3.

а) $y = (x + 3)^2 - 4$;

в) $y = -(x + 1)^2 - 1$;

б) $y = -2(x - 1)^2 + 3$;

г) $y = \frac{1}{2}(x - 4)^2 + 1$.

Для каждой функции укажите наибольшее (или наименьшее) значение, а также промежутки убывания и промежутки возрастания.

150

Постройте график функции:

а) $y = x^2 - 2x + 3$;

в) $y = x^2 + 6x + 8$;

б) $y = x^2 + 4x$;

г) $y = x^2 - 4x + 4$.

151

Запишите уравнение параболы в виде $y = a(x + p)^2 + q$, если известно, что она получена:

а) из параболы $y = x^2$ сдвигом вдоль оси x на 5 единиц влево и вдоль оси y на 3 единицы вниз;

б) из параболы $y = 2x^2$ сдвигом вдоль оси y на 6 единиц вверх и вдоль оси x на 1 единицу вправо;

в) из параболы $y = -5x^2$ сдвигом вдоль оси x на 4 единицы влево и вдоль оси y на 4 единицы вверх.

152

ЗАДАЧА-ИССЛЕДОВАНИЕ

1) Сравните значения функции $y = x^2 + 1$ при $x = -3$ и $x = 3$, при $x = \frac{1}{2}$ и $x = -\frac{1}{2}$, при $x = -100$ и $x = 100$. Какое свойство этой функции вы обнаружили? Обладает ли этим свойством функция $y = (x + 1)^2$? $y = x^2 + x$?

2) Функцию $y = f(x)$ называют *чётной*, если её область определения симметрична относительно начала координат и при любом значении x из области определения $f(-x) = f(x)$.

Так, функция $y = x^2 + 1$ чётная, а функции $y = (x + 1)^2$ и $y = x^2 + x$ чётными не являются. Придумайте свои примеры чётных функций.

3) Каким свойством обладает график чётной функции? Начертите в системе координат какую-нибудь линию, которая может служить графиком чётной функции.

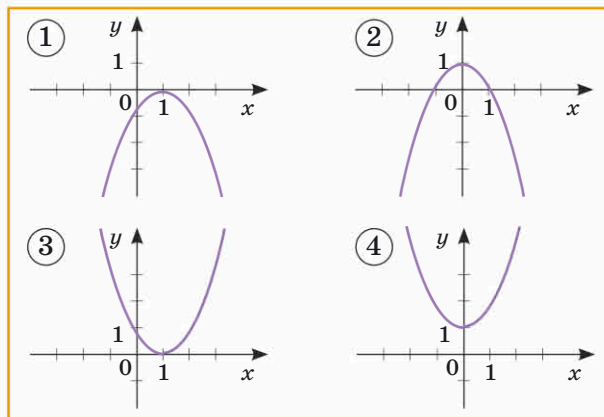


Рис. 2.22

2.4

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Формулы для вычисления координат вершины графика квадратичной функции.
- Как применять свойства квадратичной функции в практических ситуациях.

ГРАФИК ФУНКЦИИ

$$y = ax^2 + bx + c$$

Вы уже приобрели некоторый опыт построения графика квадратичной функции и убедились, что это парабола и её характерными особенностями являются вершина и направление ветвей. Вы познакомились с разными способами нахождения координат вершины параболы. Теперь вы узнаете универсальный приём — поиск координат вершины параболы путём вычисления по формулам.

НОВЫЙ СПОСОБ ПОСТРОЕНИЯ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

$y = ax^2 + bx + c$ В предыдущем пункте мы показали, что график функции $y = 2x^2 + 4x - 1$ можно получить из параболы $y = 2x^2$, выполнив параллельные переносы вдоль координатных осей. Для этого нам пришлось бы преобразовать трёхчлен $2x^2 + 4x - 1$, выделив в нём квадрат двучлена. Нельзя ли таким приёмом воспользоваться при построении графика любой квадратичной функции? Оказывается, для всякой квадратичной функции верно утверждение:



график функции $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$, можно получить из графика функции $y = ax^2$ с помощью параллельных переносов вдоль координатных осей.

Чтобы убедиться в этом, решим задачу в общем виде, т.е. представим выражение $ax^2 + bx + c$ в виде $a(x + p)^2 + q$:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 3x + 2 &= \\ &= 2\left(x^2 + \frac{3}{2}x + 1\right) = \\ &= 2\left(x^2 + 2 \cdot \frac{3}{4}x + \frac{9}{16} - \frac{9}{16} + 1\right) = \\ &= 2\left(\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{16}\right) = \\ &= 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = \\ &= a\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = \\ &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right) = \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \end{aligned}$$

Мы представили формулу $y = ax^2 + bx + c$ в виде $y = a(x + p)^2 + q$, где $p = \frac{b}{2a}$ и $q = \frac{4ac - b^2}{4a}$, и наше утверждение является верным.



Отсюда следует, что:

- график функции $y = ax^2 + bx + c$ — это такая же парабола, что и парабола $y = ax^2$;
- у параболы $y = ax^2 + bx + c$ то же направление ветвей, что и у параболы $y = ax^2$;
- вершиной параболы $y = ax^2 + bx + c$ служит точка с координатами $x = -\frac{b}{2a}$ и $y = \frac{4ac - b^2}{4a}$, а осью симметрии — вертикальная прямая $x = -\frac{b}{2a}$.

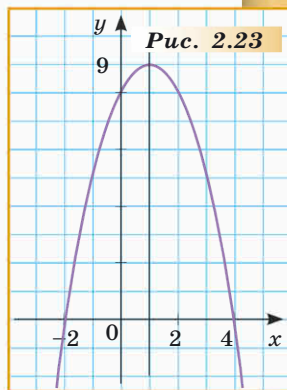
Эти выводы дают нам новый удобный способ нахождения координат вершины параболы $y = ax^2 + bx + c$: зная коэффициенты a , b и c , эти координаты можно просто вычислить по формулам. При этом достаточно помнить только формулу $x = -\frac{b}{2a}$, по которой находится абсцисса вершины. А её ординату можно получить, подставив найденную абсциссу в уравнение параболы.

Теперь у вас есть разные способы нахождения координат «главной» точки параболы $y = ax^2 + bx + c$ — её вершины: с помощью выделения квадрата двучлена и путём вычисления по формулам. И вы можете пользоваться тем из них, который вам больше нравится.

Пример 1. Построим параболу, заданную уравнением $y = -x^2 + 2x + 8$. Сначала найдём координаты вершины:

$$x = -\frac{2}{2 \cdot (-1)} = 1, \quad y = -1^2 + 2 \cdot 1 + 8 = 9.$$

Отметим точку (1; 9) в координатной плоскости, проведём ось симметрии параболы — прямую $x = 1$ и обратим внимание на то, что ветви параболы направлены вниз. Найдём координаты ещё нескольких симметричных точек графика: (0; 8) и (2; 8), (−1; 5) и (3; 5), (−2; 0) и (4; 0). Отметим найденные точки в координатной плоскости и проведём через них плавную линию. Получим параболу $y = -x^2 + 2x + 8$ (рис. 2.23).



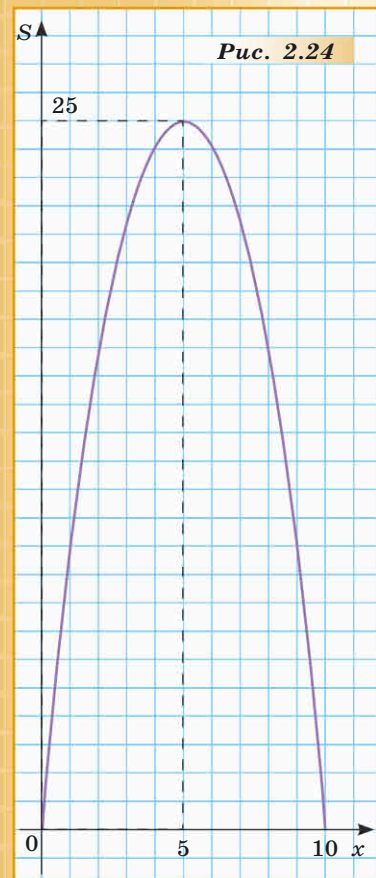
ПРИМЕНЕНИЕ ГРАФИКА ФУНКЦИИ $y = ax^2 + bx + c$ Многие практические задачи сводятся к нахождению наибольшего или наименьшего значения функции, заданной на отрезке. Такие задачи называют задачами на максимум-минимум.

Пример 2. Площадь S прямоугольника с периметром, равным 20 см, является функцией длины основания x (измеряемой в сантиметрах). Выясним, при каком значении x площадь прямоугольника будет наибольшей.

Сначала зададим функцию $S(x)$ формулой. Если длина одной стороны прямоугольника равна x , то длина другой равна $10 - x$. Тогда $S(x) = x(10 - x)$, т.е. $S(x) = -x^2 + 10x$.

График функции $S(x) = -x^2 + 10x$, соответствующий условию задачи, схематично изображён на рисунке 2.24. Заметьте: площадь не может быть отрицательной, поэтому вычерчена только та часть параболы, которая расположена выше оси x .

Ответ на вопрос задачи дают координаты вершины параболы. Площадь прямоугольника будет наибольшей при $x = 5$ см, т.е. в том случае, когда этот прямоугольник окажется квадратом.



ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

● Какие способы вычисления координат вершины параболы

$$y = ax^2 + bx + c$$

вы знаете? Найдите координаты вершины параболы

$$y = -2x^2 + 4x + 9.$$

● Постройте параболу, заданную уравнением $y = 2x^2 - 4x + 3$. По графику функции $y = 2x^2 - 4x + 3$ опишите её свойства.

УПРАЖНЕНИЯ

СТРОИМ ГРАФИКИ ФУНКЦИЙ ВИДА $y = ax^2 + bx + c$

153

Вычислите координаты вершины параболы:

а) $y = x^2 - 4x + 2$; б) $y = 2x^2 - 6x + 2$; в) $y = -3x^2 + 6x + 5$.

154

Укажите направление ветвей параболы, вычислите координаты вершины и покажите схематически расположение параболы в координатной плоскости.

а) $y = x^2 + 4x - 1$; б) $y = -2x^2 + 2x - 1$; в) $y = -x^2 - 14x - 48$.

155

Постройте график функции:

а) $y = 2x^2 - 4x + 5$; б) $y = x^2 + 4x + 6$; в) $y = -\frac{1}{2}x^2 - 4x - 9$.

Воспользуйтесь следующим планом:

- 1) найдите координаты вершины параболы;
- 2) отметьте вершину в координатной плоскости и проведите ось симметрии параболы;
- 3) определите направление ветвей;
- 4) вычислите координаты нескольких точек параболы и отметьте их в координатной плоскости;
- 5) проведите параболу.

156

Постройте график функции:

а) $y = x^2 - 4x + 3$; б) $y = 0,5x^2 + x - 4$; в) $y = x^2 - 6x + 11$;
 г) $y = -x^2 + 4x - 3$; д) $y = -0,5x^2 - x + 4$; е) $y = -x^2 + 6x - 11$.

В каждом случае укажите:

- 1) наибольшее (или наименьшее) значение функции;
- 2) промежутки возрастания и убывания функции;
- 3) значения x , при которых $y = 0$, $y > 0$, $y < 0$.

157

Постройте график функции:

а) $y = 2x^2 - 4x - 1$; б) $y = x^2 + 2x - 4$; в) $y = -x^2 + 6x - 7$.

В каждом случае укажите нули функции, наименьшее (или наибольшее) значение функции.

158

Постройте график функции:

а) $y = x^2 + 6x + 5$; б) $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x$; в) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 4$;
 г) $y = -x^2 + 2x - 5$; д) $y = -2x^2 + 8$; е) $y = x^2 + 4x + 4$.

В каждом случае укажите:

- 1) промежутки возрастания и убывания функции;
- 2) значения x , при которых $y = 0$, $y > 0$, $y < 0$;
- 3) наибольшее (или наименьшее) значение функции;
- 4) область значений функции.

Неверно!

При выполнении задания: «Приведите пример квадратичной функции, график которой целиком расположен ниже оси x » — ученик записал три варианта ответа:

- 1) $y = -x^2 + x - 2$; 2) $y = -x^2 + 4x - 3$; 3) $y = -x^2 + 3x - 4$.
 Один из ответов неверный. Какой?

159

Постройте график функции на заданном промежутке; укажите наименьшее и наибольшее значения функции; укажите область значений функции:

- а) $y = 2x^2 - 6x + 4$; $[0; 2]$; в) $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x - 5$; $[-4; 1]$;
б) $y = -2x^2 + 4x + 6$; $[-1; 2]$; г) $y = \frac{1}{4}x^2 + x + 1$; $[-4; 2]$.

160

Постройте график функции:

- а) $y = (x - 1)(x - 5)$; в) $y = (x - 2)(4 - x)$;
б) $y = (x + 1)(2x - 6)$; г) $y = -0,5x(4 - x)$.

РЕШАЕМ ЗАДАЧИ С ОПОРОЙ НА ГРАФИК

161

Мяч бросили вертикально вверх с высоты 3 м с начальной скоростью 9 м/с. На какую максимальную высоту поднялся мяч и когда он упал на землю?

Подсказка. Из курса физики вы знаете, что высота h , на которой находится мяч, является квадратичной функцией времени полёта t . Она вычисляется по формуле $h = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h_0$. Подставив в эту формулу значения v_0 и h_0 и считая, что $g \approx 9,8$ м/с², получим $h = -4,9t^2 + 9t + 3$ (h — в м, t — в с).

162

Мяч падает с высоты 20 м с начальной скоростью, равной нулю.

- 1) Запишите уравнение, которое задаёт соотношение между высотой h (м) мяча над землёй и временем падения t (с).
- 2) Начертите график зависимости высоты от времени падения (возьмите удобный масштаб по осям).
- 3) По графику определите:
 - а) сколько примерно времени будет падать мяч;
 - б) когда он падает быстрее — в первую секунду или во вторую;
 - в) на каком расстоянии от земли окажется мяч через 1,5 с.

163

а) На рисунке 2.25 изображено кольцо, радиус внешнего круга которого равен 2. Запишите формулу, выражающую зависимость площади A кольца от радиуса внутреннего круга x . Выполните следующие задания.

- 1) Начертите график зависимости A от x .
- 2) Какова область определения рассматриваемой функции?
- 3) Опишите, как меняется площадь A кольца с изменением x от 0 до 2; от 0 до 1; от 1 до 2.

б) На рисунке 2.26 изображено кольцо, радиус внешнего круга которого равен 2. Запишите формулу, выражающую зависимость площади A кольца от его ширины x . Выполните следующие задания.

- 1) Начертите график зависимости A от x .
- 2) Какова область определения рассматриваемой функции?
- 3) Опишите, как меняется площадь A кольца с изменением x от 0 до 2; от 0 до 1; от 1 до 2.

Подсказка. Воспользуйтесь формулой площади круга $S = \pi r^2$, где r — радиус круга, $\pi \approx 3$.

Рис. 2.25

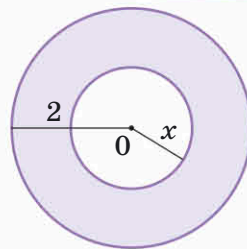
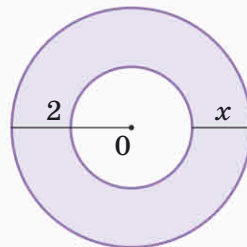


Рис. 2.26



164

МАТЕМАТИКА ВОКРУГ НАС Футболист на тренировке подбрасывает мяч ногой вертикально вверх с начальной скоростью 15 м/с. На какую максимальную высоту поднимется мяч?

2.5

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Какое неравенство называется квадратным.
- Приём решения квадратного неравенства.

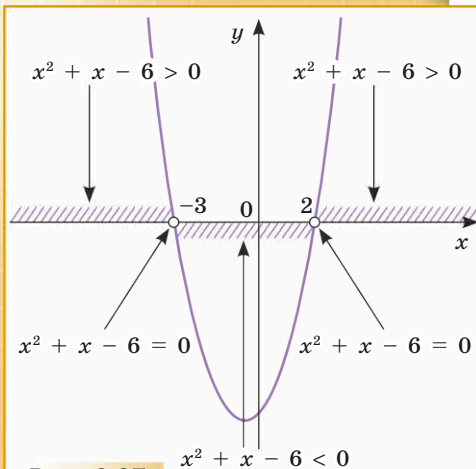


Рис. 2.27

КВАДРАТНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Вы уже умеете решать линейное неравенство и можете показать множество его решений на координатной прямой. Теперь вы научитесь решать квадратные неравенства. А понять и усвоить приём их решения вам поможет график квадратичной функции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КВАДРАТНОГО НЕРАВЕНСТВА Посмотрите на рисунок 2.27. На нём изображён график функции $y = x^2 + x - 6$. График пересекает ось x в двух точках, абсциссы которых равны -3 и 2 , т.е. при $x = -3$ и $x = 2$ значения функции $y = x^2 + x - 6$ равны нулю. При $-3 < x < 2$ график расположен ниже оси x , т.е. на промежутке от -3 до 2 значения функции $y = x^2 + x - 6$ отрицательны. При $x < -3$ и $x > 2$ график расположен выше оси x , т.е. на каждом из этих промежутков значения функции $y = x^2 + x - 6$ положительны.

Анализируя положение графика $y = x^2 + x - 6$ относительно оси x , мы, по сути, нашли множества решений неравенств $x^2 + x - 6 < 0$ и $x^2 + x - 6 > 0$. Первое неравенство выполняется при $-3 < x < 2$, второе — при $x < -3$ и $x > 2$.

Неравенство вида

$ax^2 + bx + c > 0$ или $ax^2 + bx + c < 0$, где $a \neq 0$, называют **квадратным неравенством**.

Понятно, что вместо строгого неравенства могут быть использованы и знаки нестрогого неравенства.

РЕШЕНИЕ КВАДРАТНОГО НЕРАВЕНСТВА Как видно из рассуждений, приведённых выше, множество решений квадратного неравенства легко найти, используя график функции $y = ax^2 + bx + c$. При этом можно ограничиться схематическим рисунком, показывающим в первую очередь положение графика относительно оси x : наличие или отсутствие точек пересечения с осью x , направление ветвей параболы. Координаты вершины параболы в данном вопросе не имеют значения.

Пример 1. Решим неравенство $2x^2 - 7x + 5 < 0$.

Выясним, пересекает ли график $y = 2x^2 - 7x + 5$ ось x . Для этого решим уравнение $2x^2 - 7x + 5 = 0$. Имеем $x_1 = 1$, $x_2 = 2,5$.

Таким образом, парабола $y = 2x^2 - 7x + 5$ пересекает ось x в двух точках, абсциссы которых равны 1 и $2,5$. Так как коэффициент при x^2 положителен, то ветви параболы направлены вверх.

Теперь можно показать схематически положение параболы в координатной плоскости (рис. 2.28). Из рисунка видно, что парабола расположена ниже оси x ,

если $1 < x < 2,5$. Эти значения x и составляют множество решений неравенства $2x^2 - 7x + 5 < 0$.

Ответ: (1; 2,5).

Пример 2. Решим неравенство $2x^2 - 7x + 5 > 0$.

Воспользуемся тем же рисунком (рис. 2.28). Мы видим, что график расположен выше оси x при $x < 1$ и $x > 2,5$. Промежутки $(-\infty; 1)$ и $(2,5; +\infty)$ вместе составляют множество решений неравенства $2x^2 - 7x + 5 > 0$.

Говорят, что множество решений неравенства

$$2x^2 - 7x + 5 > 0$$

есть *объединение* промежутков $(-\infty; 1)$ и $(2,5; +\infty)$. Объединение промежутков записывают с помощью специального символа $\cup$: $(-\infty; 1) \cup (2,5; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; 1) \cup (2,5; +\infty)$.

Пример 3. Решим неравенство $-3x^2 + 2x - 1 < 0$.

Заменим неравенство равносильным неравенством с положительным первым коэффициентом:

$$3x^2 - 2x + 1 > 0.$$

Выясним, пересекает ли график функции

$$y = 3x^2 - 2x + 1$$

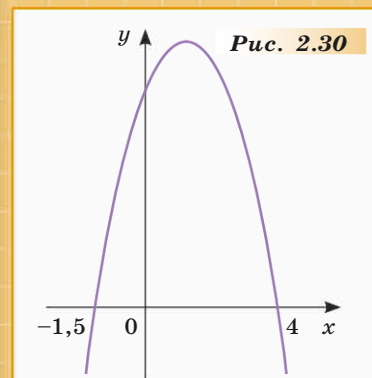
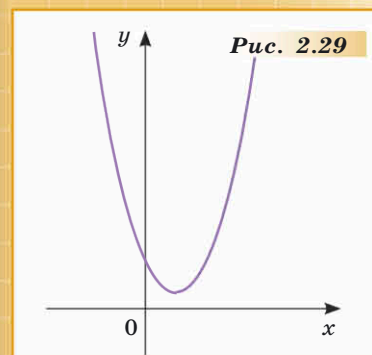
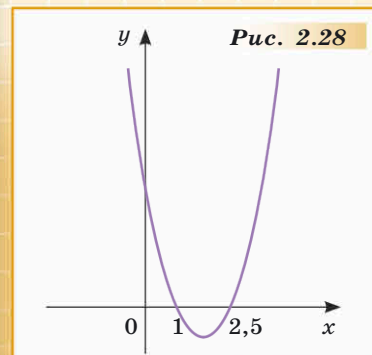
ось x . Для этого найдём дискриминант уравнения $3x^2 - 2x + 1 = 0$:

$$D = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = 4 - 12 < 0.$$

Итак, уравнение корней не имеет, т.е. парабола ось x не пересекает. Учитывая, что ветви параболы направлены вверх, изобразим её схематически (рис. 2.29).

Мы видим, что график целиком расположен выше оси x . Это означает, что неравенство $3x^2 - 2x + 1 > 0$ выполняется при любом x .

Ответ: $(-\infty; +\infty)$.



ПРИЁМ РЕШЕНИЯ НЕРАВЕНСТВА ВИДА $(ax + b)(cx + d) > 0$

Пример 4. Решим неравенство $(2x + 3)(4 - x) > 0$.

Если в левой части неравенства раскрыть скобки, то получится квадратный трёхчлен. Однако делать это нецелесообразно. Трёхчлен в левой части разложен на множители, и поэтому можно легко найти его корни. Для этого решим два линейных уравнения: $2x + 3 = 0$ и $4 - x = 0$. Имеем $x_1 = -1,5$; $x_2 = 4$.

Выясним, каково направление ветвей параболы — графика функции $y = (2x + 3)(4 - x)$. Для этого также не нужно преобразовывать произведение $(2x + 3)(4 - x)$ в трёхчлен; достаточно найти его старший член — это выражение $-2x^2$. Так как его коэффициент отрицателен, то ветви параболы направлены вниз.

Схематический график функции $y = (2x + 3)(4 - x)$ изображён на рисунке 2.30. Из рисунка видно, что при $-1,5 < x < 4$ график расположен выше оси x . Этот промежуток и является множеством решений данного неравенства.

Ответ: $(-1,5; 4)$.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

● Множество решений квадратного неравенства можно найти, используя схематический график соответствующей квадратичной функции. Что необходимо отразить на графике?

● На рисунке 2.30 показано схематически положение параболы

$$y = -2x^2 + 5x + 12.$$

Как можно записать множество решений неравенства $-2x^2 + 5x + 12 < 0$?

УПРАЖНЕНИЯ

РЕШАЕМ КВАДРАТНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

165

Вычислите абсциссы точек пересечения параболы с осью x , изобразите параболу схематически и отметьте на оси x значения аргумента, при которых $y = 0$; $y < 0$; $y > 0$:

а) $y = x^2 - 1$;

в) $y = x^2 + 4x - 5$;

д) $y = x^2 - 5x + 6$;

б) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$;

г) $y = x^2 - 6x + 5$;

е) $y = -x^2 + x + 2$.

В каждом случае проверьте себя, подставив в формулу какое-нибудь значение из найденного множества.

166

Найдите множество решений каждого из данных неравенств:

а) $x^2 + 4x - 21 < 0$ и $x^2 + 4x - 21 > 0$;

в) $x^2 - 9 < 0$ и $x^2 - 9 > 0$;

б) $x^2 - 4x - 12 > 0$ и $x^2 - 4x - 12 < 0$;

г) $x^2 + 10x > 0$ и $x^2 + 10x < 0$.

Подсказка. В качестве образца воспользуйтесь примерами 1 и 2.

Решите неравенство (167–173):

167

а) $-x^2 - 7x - 10 < 0$;

в) $-x^2 + 4 > 0$;

б) $-x^2 + 6x + 7 > 0$;

г) $1 - x^2 < 0$.

Подсказка. В качестве образца воспользуйтесь примером 3.

168

а) $2x^2 - 4x + 2 \geq 0$;

в) $-4x^2 + 2x \geq 0$;

б) $-2x^2 - 6x + 20 \geq 0$;

г) $0,5x^2 - 8 \geq 0$.

169

а) $x^2 - 4x + 7 \leq 0$;

в) $x^2 + 3 > 0$;

д) $-3x^2 \leq 0$;

б) $-x^2 + 4x - 5 \geq 0$;

г) $-x^2 - 2 \leq 0$;

е) $2x^2 > 0$.

170

а) $x^2 < 25$;

г) $x^2 + 1 \geq 5$;

ж) $x < x^2$;

к) $-x^2 \geq -100$;

б) $x^2 \geq \frac{1}{4}$;

д) $2x > x^2$;

з) $0,5x^2 > -3x$;

л) $\frac{1}{2}x^2 < 50$;

в) $-2x^2 < -18$;

е) $x^2 \leq x$;

и) $9 \leq x^2$;

м) $6,4 > 0,1x^2$.

171

а) $3x^2 - 10x + 4 < 1$;

в) $-5x^2 + 4x + 11 > 10$;

б) $-3x^2 + 7x + 4 < -2$;

г) $6x^2 + 7x - 2 > -3$.

172

а) $4x(x + 2) < 5$;

в) $(2x + 1)(x + 1) > 3$;

б) $3x(1 - x) \leq -6$;

г) $(1 - 2x)(1 - 3x) \leq 2$.

Подсказка. Приведите неравенство к виду квадратного неравенства.

173

а) $(x - 1)(x - 3) \leq 0$;

в) $(2x + 6)(x + 4) \geq 0$;

д) $2x(x - 10) > 0$;

б) $(x + 5)(x - 2) > 0$;

г) $(3x - 3)(x + 1) < 0$;

е) $x(2x + 3) \leq 0$.

Подсказка. В качестве образца воспользуйтесь примером 4.

РЕШАЕМ ЗАДАЧИ, СВОДЯЩИЕСЯ К КВАДРАТНЫМ НЕРАВЕНСТВАМ

174

Найдите значения x , при которых:

а) значения функции $y = 3x^2 + 2x - 1$ меньше значений функции $y = x^2 - x + 1$;

б) значения функции $y = -4x^2 + x + 1$ больше значений функции $y = 2 - 4x$.

175

Решите неравенство:

а) $\frac{100}{(x-5)(x-10)} > 0$; б) $\frac{1}{(2-x)(x+4)} \leq 0$; в) $\frac{-20}{(1-x)(3-x)} < 0$.

176

а) Найдите положительные решения неравенства $x^2 + 2x - 2 < 0$.б) Найдите отрицательные решения неравенства $x^2 - 2x - 1 < 0$.

177

Найдите решения неравенства:

а) $5x^2 \geq 4x + 1$, принадлежащие промежутку $[-2; 2]$.б) $5x - 1 > 4x^2$, принадлежащие промежутку $[\frac{1}{3}; \frac{3}{2}]$.

178

Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 6x^2 - 54 \leq 0, \\ x + 3 > 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 6x^2 + 7x + 1 \leq 0, \\ x^2 - 4 \geq 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 + 5 > 0, \\ x^2 + 5x > 0; \end{cases}$
 г) $\begin{cases} 3x^2 + 2x - 1 \geq 0, \\ 2 - \frac{1}{2}x \geq 0; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x^2 - 1 \leq 0, \\ x^2 - 3x \geq 0; \end{cases}$ е) $\begin{cases} -(x+1)^2 < 0, \\ 1 - x \geq 0. \end{cases}$

179

Найдите допустимые значения переменной в выражении:

а) $\sqrt{7x^2 + 6x - 1}$; б) $\sqrt{4 + x - 0,5x^2}$; в) $\sqrt{\frac{x^2}{8} + \frac{x}{4} - 1}$; г) $\sqrt{3 - \frac{1}{2}x^2}$.

180

Функция задана формулой $y = f(x)$. Найдите область определения функции:

а) $f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$; б) $f(x) = \frac{\sqrt{6+x-x^2}}{x^2}$; в) $f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2-1}$; г) $f(x) = \frac{\sqrt{3x(x+2)}}{x-2}$; д) $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2-1}$; е) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2-4}$.

181

Докажите двумя способами, что при всех значениях переменной a верно неравенство: а) $a^2 + a + 1 > 0$; б) $-a^2 + 3a - 5 < 0$.

Подсказка. Способ 1. Используйте графические соображения. Способ 2. Выделите квадрат двучлена и сравните полученное выражение с нулём.

182

Докажите двумя способами, что не существует таких значений x , при которых выполняется неравенство: а) $x^2 - 4x + 5 < 0$; б) $-x^2 + 8x - 20 > 0$.

ИССЛЕДУЕМ КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

183

При каких значениях b уравнение $x^2 + bx + 4 = 0$ имеет два различных корня? Имеет ли уравнение корни при $b = -25,5; 1,5; 5,36$?

184

При каких значениях b уравнение $-2x^2 - bx - 8 = 0$ имеет корни? Приведите пример отрицательного значения b , удовлетворяющего этому условию.

185

Найдите все целые значения b , при которых уравнение $9x^2 + 2bx + 1 = 0$ не имеет корней.

186

Найдите все значения m , при которых уравнение $mx^2 - 2x + m = 0$ имеет два различных корня. Из чисел $-1,5; -0,5; 0; 0,5; 1,5$ выберите те, которые удовлетворяют этому условию.

187

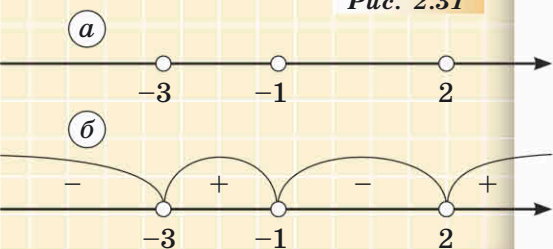
Найдите все целые значения m , при которых уравнение $4mx^2 + 5x + m = 0$ имеет два различных корня.

2.6

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Что метод интервалов — это приём решения неравенств.
- В чём заключается этот приём.

Рис. 2.31



	$(-\infty; -3)$	$(-3; -1)$	$(-1; 2)$	$(2; +\infty)$
$x + 3$	—	+	+	+
$x + 1$	—	—	+	+
$x - 2$	—	—	—	+
$f(x)$	—	+	—	+

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- На примере неравенства

$$(x + 3)(x + 1)(x - 2) > 0$$

расскажите, как решают неравенства методом интервалов **рис. 2.31**.

- Даны функции

$$f(x) = (x + 5)(x + 1)(x - 2) \text{ и}$$

$$g(x) = x(x + 4)(x + 2).$$

Для каждой из функций: найдите нули, отметьте их на координатной прямой и определите знаки на образовавшихся промежутках.

Укажите значения x , при которых:

- 1) $f(x) > 0$;
- 2) $g(x) < 0$;
- 3) $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$;
- 4) $f(x) < 0$, а $g(x) > 0$.

МЕТОД ИНТЕРВАЛОВ

Метод интервалов — это удобный приём решения некоторых видов неравенств. Мы рассмотрим его для одного из наиболее простых случаев, а именно, неравенств вида $(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) > 0$, когда в левой части неравенства — произведение двух или более линейных двучленов, а в правой — нуль. Понятно, что знаки неравенств могут быть другими.

КАК РЕШАЮТ НЕРАВЕНСТВА МЕТОДОМ ИНТЕРВАЛОВ Пусть требуется решить неравенство $(x + 3)(x + 1)(x - 2) < 0$. Для этого рассмотрим функцию $f(x) = (x + 3)(x + 1)(x - 2)$. Её область определения — множество всех действительных чисел. Нули функции — числа -3 , -1 и 2 . Точки -3 , -1 и 2 разбивают область определения функции на промежутки $(-\infty; -3)$, $(-3; -1)$, $(-1; 2)$ и $(2; +\infty)$ (**рис. 2.31, а**).

Посмотрите на таблицу. В ней проставлены знаки каждого из множителей $x + 3$, $x + 1$, и $x - 2$ в указанных промежутках, а также знак их произведения. (Объясните, как определяют знаки двучленов.)

Мы видим, что функция сохраняет знак на каждом из промежутков, ограниченных нулями функции, а при переходе через нуль её знак меняется на противоположный. Рассмотренное свойство функции (свойство чередования знаков) иллюстрирует рисунок **2.31, б**.

Теперь легко найти множество решений неравенства $(x + 3)(x + 1)(x - 2) < 0$. Произведение в его левой части отрицательно на промежутках $(-\infty; -3)$ и $(-1; 2)$. Получаем ответ: $(-\infty; -3) \cup (-1; 2)$.

Приём, с помощью которого мы решили неравенство, и есть пример применения *метода интервалов*.

Пример. Решим неравенство $x(x - 4)(x + 7) > 0$.

Отметим на координатной прямой точки, в которых произведение $x(x - 4)(x + 7)$ равно нулю. Найдём знаки произведения на каждом из промежутков. Начнём с крайнего справа промежутка, так как в нём значение произведения заведомо положительно (объясните почему). Определим, двигаясь влево по координатной прямой, знаки в остальных промежутках. Используем для этого свойство чередования знаков (**рис. 2.32**). Записываем ответ: $(-7; 0) \cup (4; +\infty)$.

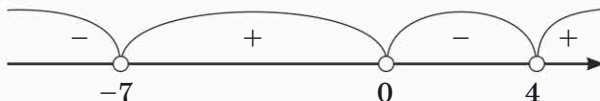


Рис. 2.32

УПРАЖНЕНИЯ

РЕШАЕМ НЕРАВЕНСТВА МЕТОДОМ ИНТЕРВАЛОВ

188

Функция $y = g(x)$ задана формулой:

а) $g(x) = (x + 5)(x + 1)(x - 1)$; б) $g(x) = x(x - 6)(x - 2)$.

Выполните задания:

- 1) найдите нули функции; отметьте их на координатной прямой;
- 2) определите знак функции в каждом из полученных интервалов, заполнив таблицу, аналогичную таблице на с. 70.

189

1) На рисунке 2.33 изображены промежутки, на которые разбивают координатную прямую нули функции $f(x) = (x + 4)(x - 3)(x - 1)$, и указаны знаки функции в каждом из них. Используя рисунок, найдите множества решений неравенств

$$(x + 4)(x - 3)(x - 1) < 0 \text{ и } (x + 4)(x - 3)(x - 1) > 0.$$

- 2) Решите неравенство: а) $x(x + 5) > 0$; б) $(x - 5)(x + 4)(x + 1) > 0$.

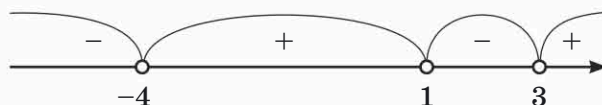


Рис. 2.33

190

Решите методом интервалов нестрогое неравенство:

а) $(x - 4)(x - 2) \leq 0$; б) $(x - 1)(x + 1)(x - 5) \leq 0$; в) $(x - 1)(x + 6)(x - 7) \geq 0$.

Совет. Обратите внимание на то, что значения x , которые обращают произведение в нуль, входят в множество решений неравенства.

191

1) Разберите приём решения неравенства $(2x + 3)(x - 11) < 0$. Преобразуем неравенство в равносильное так, чтобы в первом множителе коэффициент при x был равен 1. Для этого вынесем за скобки число 2 и разделим обе части неравенства на 2, получим $(x + 1,5)(x - 11) < 0$. Доведите решение до конца.

2) Решите неравенство, воспользовавшись аналогичным приёмом:

а) $(x - 1)(2x - 5) < 0$; б) $(x + 4)(3x - 9) \leq 0$; в) $x(2x - 7)(x + 1) > 0$.

192

Найдите множество решений неравенства:

а) $-(x + 3)(x + 7) > 0$; б) $-x(x + 2)(x - 1)(x - 3) > 0$; в) $-(x + 1)(x - 6) \leq 0$.

Подсказка. Умножьте обе части неравенства на -1 . Не забудьте при этом поменять знак неравенства на противоположный.

193

Решите неравенство: а) $x(x + 1)(x - 4)(2 - x) < 0$; б) $(x + 5)(3 - x)(5 - x) > 0$.

а) Вынесите в последнем двучлене за скобки множитель -1 и воспользуйтесь подсказкой из упр. 192.

194

При каких значениях x имеет смысл выражение:

а) $\sqrt{(x - 3)(x + 2)}$; б) $\sqrt{x(5 - x)(3 + x)}$; в) $\sqrt{(x + 8)(x + 4)(x - 1)}$?

195

Найдите множество решений неравенства:

а) $(x^2 - 5x + 4)(x - 2) < 0$; б) $(x^2 - 9)(x - 25) > 0$; в) $(x^2 - 7x + 12)(1 - x) > 0$.

196

Решите неравенство:

а) $(x^2 + 1)(x - 6)(x + 3) < 0$; б) $(2x^2 + 3)(x + 0,5)(x - 3) \geq 0$.

Подсказка. а) При любом значении x множитель $x^2 + 1$ принимает положительные значения, поэтому неравенство можно заменить более простым, равносильным данному: $(x - 6)(x + 3) > 0$. А вот второе неравенство не равносильно неравенству $(x - 6)(x + 3) < 0$. Объясните, почему.

УЗНАЙТЕ БОЛЬШЕ

ГРАФИК ДРОБНО-ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИИ

В этом пункте вы познакомитесь с классом дробно-линейных функций и научитесь строить их графики. Приведём примеры дробно-линейных функций:

$$y = \frac{3x - 1}{x + 5}, \quad y = \frac{3}{2x + 4}, \quad y = \frac{8 - x}{3x}.$$



Дробно-линейной называют функцию, которую можно задать формулой вида $y = \frac{ax + b}{cx + d}$.

(Это определение нужно было бы дополнить ограничениями на числовые коэффициенты. Так, коэффициент c не должен быть равен нулю, в противном случае мы будем иметь не дробно-линейную, а обыкновенную линейную функцию. Однако полный список ограничений мы рассматривать не будем.)

Частным случаем дробно-линейной функции является хорошо вам знакомая *обратно-пропорциональная зависимость*, т.е. к дробно-линейным функциям относят и всякую функцию, которая задаётся формулой вида $y = \frac{k}{x}$. Вы знаете, что гипербола состоит из двух бесконечных ветвей. Эти ветви, удаляясь в бесконечность, неограниченно приближаются к осям координат, однако общих точек с осями они не имеют. Говорят, что координатные оси являются *асимптотами* графика функции $y = \frac{k}{x}$ (от греческого слова, означающего в переводе «несовпадающий»); ось x — *горизонтальная асимптота*, а ось y — *вертикальная асимптота*.

Чтобы понять, как строится график произвольной дробно-линейной функции, разберём несколько примеров.

Пример 1. Рассмотрим функцию $y = \frac{6}{x} + 1$. График этой функции можно получить сдвигом гиперболы $y = \frac{6}{x}$ на одну единицу вверх (**рис. 2.34**). Так как график перемещается вдоль оси y , то вертикальной асимптотой новой гиперболы по-прежнему служит ось y . А горизонтальная асимптота вместе с графиком «переезжает» на единицу вверх, теперь это прямая $y = 1$.

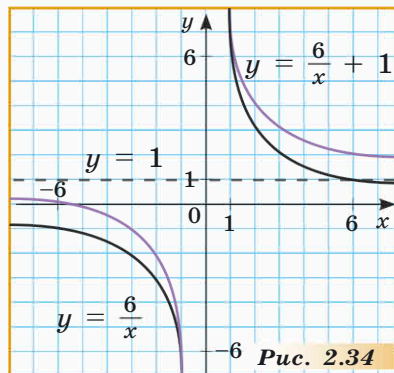


Рис. 2.34

Пример 2. Рассмотрим функцию $y = \frac{6}{x - 2}$. Её график тоже гипербола. Она получается сдвигом графика $y = \frac{6}{x}$ на две единицы вправо (**рис. 2.35**). У графика $y = \frac{6}{x - 2}$ горизонтальная асимптота осталась прежней — это ось x . Но в этом случае другой стала вертикальная асимптота: теперь это прямая $x = 2$.

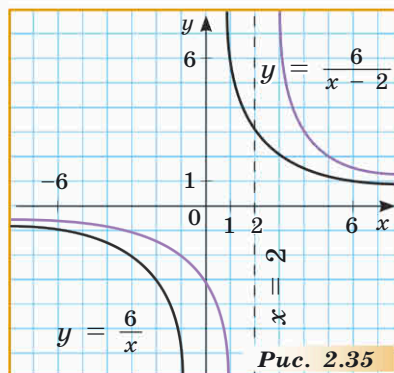


Рис. 2.35

Обратите внимание: число 2 не входит в область определения функции $y = \frac{6}{x - 2}$ и точка

$x = 2$ «разрывает» координатную прямую на два открытых луча ($x < 2$ и $x > 2$), на каждом из которых выражение $y = \frac{6}{x-2}$ имеет смысл.

Пример 3. Построим график функции

$$y = \frac{4}{x+2} - 1.$$

Для этого графика исходной является гипербола $y = \frac{4}{x}$. Её надо сдвинуть на 2 единицы влево и на 1 единицу вниз (рис. 2.36).

«Крест асимптот» новой гиперболы образуют вертикальная прямая $x = -2$ и горизонтальная прямая $y = -1$. Эти прямые ограничивают четыре области на координатной плоскости, в двух из которых располагаются ветви гиперболы.

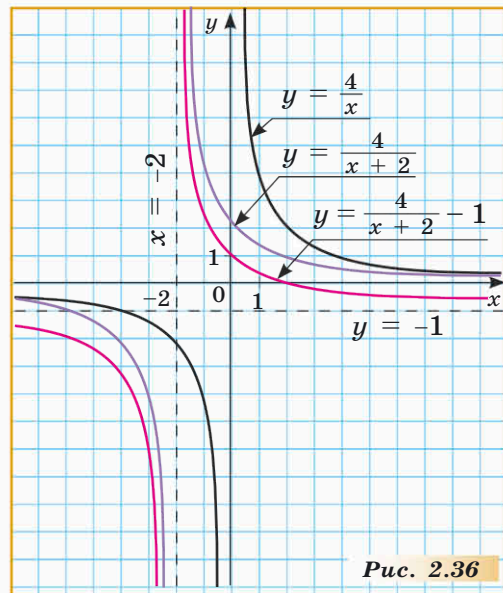


Рис. 2.36

1

1) Укажите асимптоты графика функции и постройте этот график по точкам:

а) $y = \frac{1}{x} - 3$; б) $y = -\frac{2}{x} + 4$.

2) Покажите с помощью схематического рисунка, как расположена в координатной плоскости гипербола, заданная формулой $y = \frac{k}{x} + q$, если

а) $k > 0, q > 0$; б) $k > 0, q < 0$; в) $k < 0, q > 0$; г) $k < 0, q < 0$.

2

1) Укажите асимптоты графика функции и постройте этот график по точкам:

а) $y = \frac{2}{x+3}$; б) $y = -\frac{1}{x-4}$.

2) Покажите с помощью схематического рисунка, как расположена в координатной плоскости гипербола, заданная формулой $y = \frac{k}{x+p}$, если

а) $k > 0, p > 0$; б) $k > 0, p < 0$; в) $k < 0, p > 0$; г) $k < 0, p < 0$.

3

Постройте в координатной плоскости асимптоты графика заданной функции и изобразите этот график схематически.

а) $y = \frac{1}{x+3} - 2$; б) $y = -\frac{3}{x+4} + 6$; в) $y = \frac{2}{x-1} - 4$; г) $y = -\frac{6}{x-3} - 2$.

В каждом случае найдите координаты точек пересечения графика с осью x и осью y и отметьте эти точки на рисунке.

Пример 4. Построим график функции $y = \frac{x+1}{x-1}$.

Прежде всего формулу следует преобразовать так, чтобы по её внешнему виду можно было судить об асимптотах графика. Для этого выделим целую часть дроби $\frac{x+1}{x-1}$:

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{(x-1)+2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}.$$

Итак, требуется построить график функции, заданной формулой

$$y = \frac{2}{x-1} + 1.$$

Это можно сделать и не выполняя непосредственно параллельные переносы.

Из формулы $y = \frac{2}{x-1} + 1$ ясно, что асимптотами графика являются прямые $x = 1$ и $y = 1$ (рис. 2.37, а). Эти прямые делят координатную плоскость на четыре угла.

Так как график получается сдвигом гиперболы $y = \frac{2}{x}$, то он расположен в верхнем правом и в нижнем левом углах.

Ветви новой гиперболы можно построить по точкам. График функции $y = \frac{x+1}{x-1}$ изображён на рисунке 2.37, б.

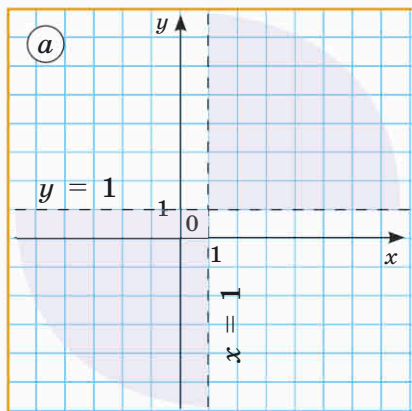
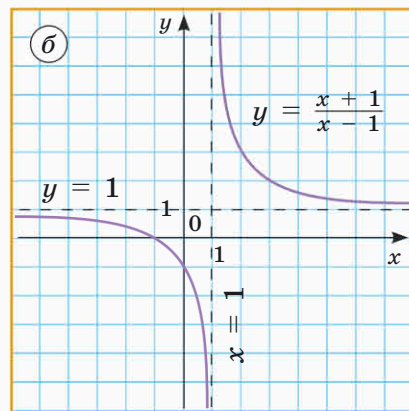


Рис. 2.37



Пример 5. Найдём асимптоты графика функции $y = \frac{2x+3}{x-1}$. Вертикальная асимптота графика очевидна — это прямая $x = 1$. А чтобы найти уравнение горизонтальной асимптоты, поступим следующим образом: понаблюдаем, как меняется значение дроби $\frac{2x+3}{x-1}$ с увеличением переменной x :

x	100	1000	10 000
$\frac{2x+3}{x-1}$	$\frac{203}{99} = 2\frac{5}{99}$	$\frac{2003}{999} = 2\frac{5}{999}$	$\frac{20003}{9999} = 2\frac{5}{9999}$

Мы видим, что чем больше x , тем ближе значение дроби к числу 2. Это станет ещё очевиднее, если преобразовать рассматриваемую дробь, разделив её числитель и знаменатель на x :

$$\frac{2x+3}{x-1} = \frac{2 + \frac{3}{x}}{1 - \frac{1}{x}}.$$

Чем больше x , тем ближе к нулю дроби $\frac{3}{x}$ и $\frac{1}{x}$ и тем меньше влияют они на значение

частного $\frac{2 + \frac{3}{x}}{1 - \frac{1}{x}}$. Поэтому с увеличением x это

частное стремится к дроби $\frac{2}{1}$, т.е. к числу 2.

Таким образом, горизонтальной асимптотой графика $y = \frac{2x+3}{x-1}$ является прямая $y = 2$.

График изображён на рисунке 2.38.

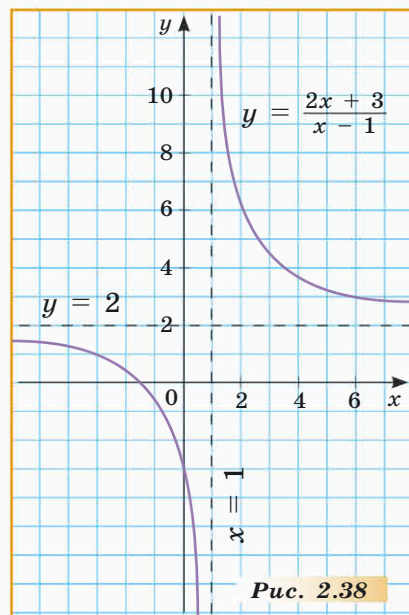


Рис. 2.38

В заключение запишем уравнения асимптот графика произвольной дробно-линейной функции $y = \frac{ax + b}{cx + d}$.



Вертикальной асимптотой является прямая $x = -\frac{d}{c}$.

Чтобы получить уравнение горизонтальной асимптоты, преобразуем дробь $\frac{ax + b}{cx + d}$, разделив её числитель и знаменатель на x :

$$\frac{ax + b}{cx + d} = \frac{a + \frac{b}{x}}{c + \frac{d}{x}}.$$

С увеличением x частное $\frac{a + \frac{b}{x}}{c + \frac{d}{x}}$ стремится к числу $\frac{a}{c}$. Поэтому горизонтальной асимптотой графика функции $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ является прямая $y = \frac{a}{c}$.



Чтобы получить уравнение горизонтальной асимптоты графика функции $y = \frac{ax + b}{cx + d}$, нужно найти отношение коэффициентов при переменной x .

4 Постройте график функции:

а) $y = \frac{x + 4}{x + 2}$; б) $y = \frac{3 - x}{x - 1}$; в) $y = \frac{x + 1}{x + 2}$.

Совет. В качестве образца воспользуйтесь примером 4, разобранным в тексте.

5 Постройте график функции:

а) $y = \frac{2x + 7}{x + 3}$; б) $y = \frac{4x + 2}{x + 1}$.

Образец. Построим график функции $y = \frac{4x - 5}{x - 2}$.

Преобразуем дробь $\frac{4x - 5}{x - 2}$, выделив её целую часть:

$$\frac{4x - 5}{x - 2} = \frac{4(x - 2) + 3}{x - 2} = 4 + \frac{3}{x - 2}.$$

Теперь легко найти асимптоты. Продолжите решение.

Сравните ответ с графиком, изображённым на рисунке 2.39.

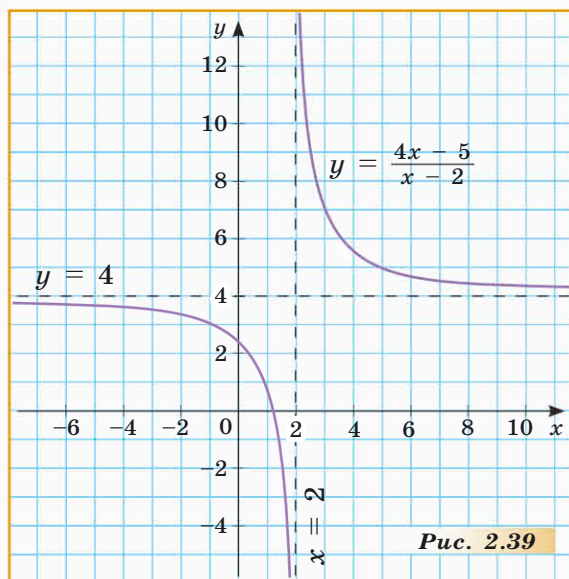


Рис. 2.39

6 Найдите асимптоты графика функции и изобразите этот график схематически:

а) $y = \frac{6x}{2x + 1}$; б) $y = \frac{x + 3}{4 - 2x}$; в) $y = \frac{3x - 5}{2x + 8}$.

ГРАФИКИ УРАВНЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ МОДУЛИ

Когда в «стандартные» уравнения прямых, парабол, гипербол включают знак модуля, их графики становятся необычными и даже красивыми. Чтобы научиться строить такие графики, надо владеть приёмами построения «базовых» фигур, а также твёрдо знать и понимать определение модуля числа. Напомним это определение:



модуль неотрицательного числа a равен самому числу a ; модуль отрицательного числа a равен противоположному ему положительному числу $-a$, т.е.

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0 \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Покажем на примерах некоторые приёмы построения графиков уравнений с модулями.

Пример 1. Построим график уравнения $y = |x^2 - 4|$.

Сначала построим параболу $y = x^2 - 4$ (рис. 2.40, а). Чтобы получить из неё график уравнения $y = |x^2 - 4|$, нужно каждую точку параболы с отрицательной ординатой заменить точкой с той же абсциссой, но с противоположной (положительной) ординатой. Иными словами, часть параболы, расположенную ниже оси x , нужно заменить линией, *симметричной ей относительно оси x* . (Представьте себе: эта часть параболы, как твёрдое тело, отворачивается на противоположную полуплоскость.) График уравнения $y = |x^2 - 4|$ изображён на рисунке 2.40, б.

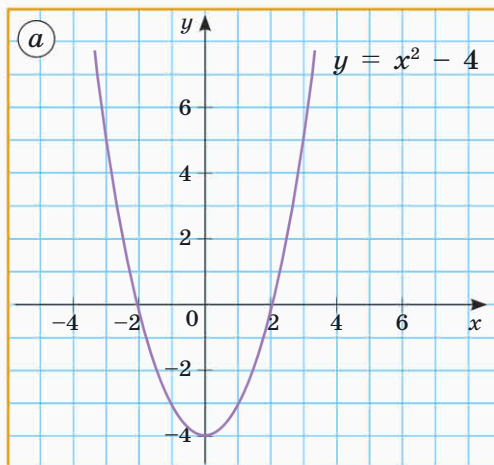
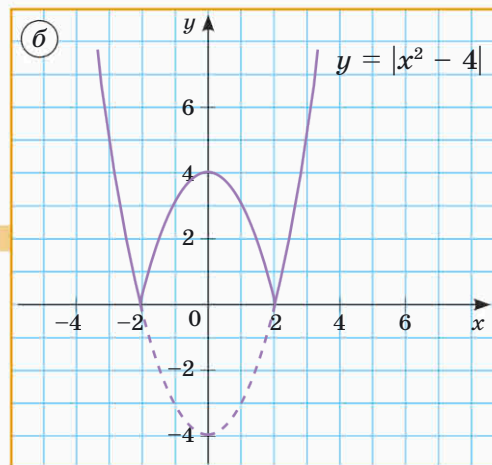


Рис. 2.40



Пример 2. Построим график уравнения $y = x^2 - 2|x|$.

Воспользовавшись определением модуля числа, заменим формулу $y = x^2 - 2|x|$ двумя, задающими зависимость переменной y от x отдельно для $x \geq 0$ и $x < 0$:

если $x \geq 0$, то $y = x^2 - 2x$; если $x < 0$, то $y = (-x)^2 - 2(-x) = x^2 + 2x$.

Теперь мы имеем дело с хорошо знакомым нам кусочным заданием зависимости. Строить график будем так:

1) построим параболу $y = x^2 - 2x$ и обведём ту её часть, которая соответствует неотрицательным значениям x , т.е. часть, расположенную правее оси y ;

2) в той же координатной плоскости построим параболу $y = x^2 + 2x$ и обведём ту её часть, которая соответствует отрицательным значениям x , т.е. часть, расположенную левее оси y .

Обведённые части парабол, симметричные относительно оси x , вместе образуют график уравнения

$$y = x^2 - 2|x| \text{ (рис. 2.41).}$$

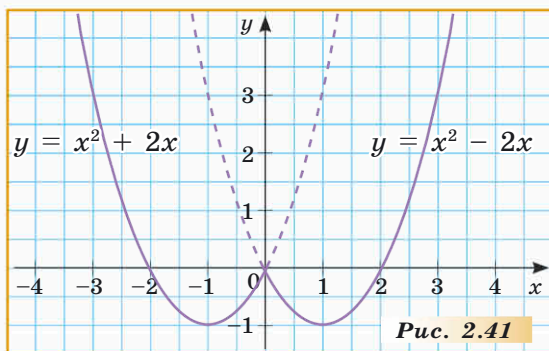


Рис. 2.41

Пример 3. Построим график уравнения $y = ||x| - 2| - 2$.

Здесь при построении графика удобно использовать сдвиги вдоль осей координат. Будем действовать по следующему плану:

- 1) построим основной график, т.е. график уравнения $y = |x|$ (рис. 2.42, а);
- 2) сдвинем построенный график на 2 единицы вниз; получится график уравнения $y = |x| - 2$ (рис. 2.42, б);
- 3) часть графика, расположенную ниже оси x , заменим её зеркальным отражением, т.е. заменим её линией, симметричной относительно оси x ; получится график уравнения $y = ||x| - 2|$ (рис. 2.42, в);
- 4) сдвинем построенный в п. 3 график на 2 единицы вниз; получится график уравнения $y = ||x| - 2| - 2$ (рис. 2.42, г);
- 5) часть графика, расположенную ниже оси x , отобразим симметрично относительно этой оси; получим график уравнения $y = ||x| - 2| - 2$ (рис. 2.42, д).

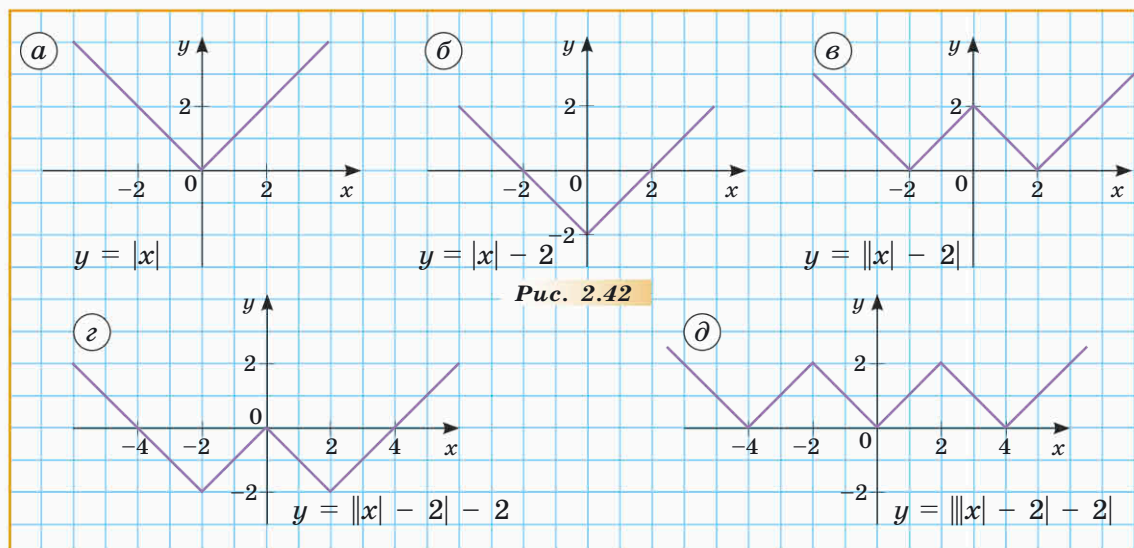


Рис. 2.42

Постройте график уравнения (1–4):

1 а) $y = |2x - 4|$; б) $y = |x^2 - 3|$; в) $y = |x^2 - x - 2|$; г) $y = \frac{6}{|x|}$; д) $y = \frac{1}{|x - 3|}$.

2 а) $y = |x| - 2x$; б) $y = x^2 + 3|x|$; в) $y = (5 - |x|)(|x| + 1)$; г) $y = \frac{1}{|x| - 3}$.

3 а) $y = ||x| - 3|$; б) $y = ||x| - 3| - 3|$.

4 а) $|y| = |x|$; б) $|y| \cdot |x| = 1$; в) $|y| + |x| = 1$; г) $|y| - |x| = 1$.

Указание. Рассмотрите уравнение отдельно для каждой координатной четверти.

ПОДВЕДЁМ ИТОГИ

Квадратичной функцией называют функцию, которую можно задать формулой вида $y = ax^2 + bx + c$, где a , b и c — некоторые числа, причём $a \neq 0$.

График квадратичной функции — *парабола*. Парабола имеет ось симметрии и вершину. Ось симметрии — прямая, параллельная оси y , или сама ось y ; вершина параболы — это точка, в которой ось симметрии пересекает параболу.

Графиком квадратичной функции вида $y = ax^2$, где $a \neq 0$, является парабола с вершиной в начале координат; её осью симметрии служит ось y ; при $a > 0$ ветви параболы направлены вверх, при $a < 0$ ветви параболы направлены вниз.

Свойства функции $y = ax^2$ при $a > 0$.

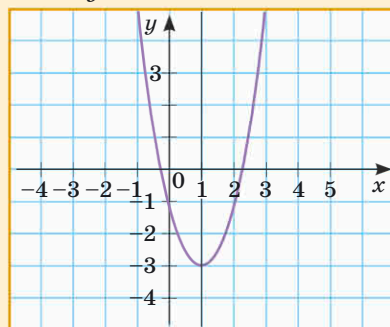
Область определения функции — множество всех действительных чисел. При $x = 0$ функция принимает наименьшее значение, равное 0. Область значений функции — промежуток $[0; +\infty)$.

Противоположным значениям аргумента соответствуют равные значения функции.

На промежутке $(-\infty; 0]$ функция убывает, а на промежутке $[0; +\infty)$ функция возрастает.

Графики квадратичных функций:

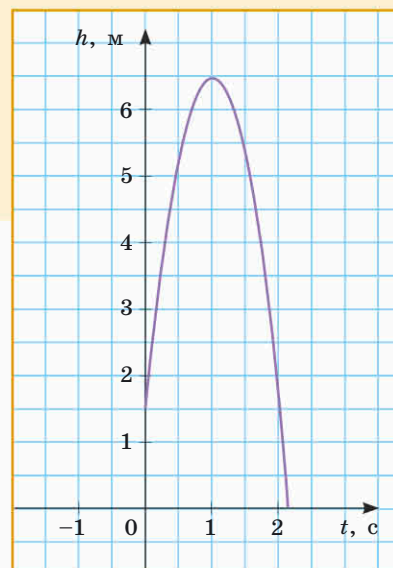
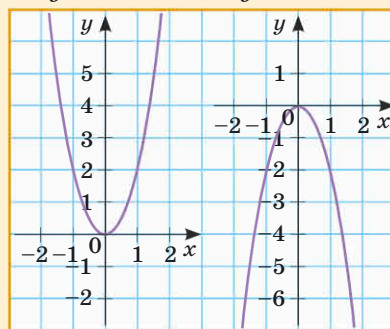
$$y = 2x^2 - 4x - 1$$



Ветви параболы направлены вверх. Ось симметрии — прямая $x = 1$, вершина — точка $(1; -3)$.

$$y = 2x^2$$

$$y = -2x^2$$



1

На рисунке изображён график зависимости высоты, на которой находился мяч, подброшенный вертикально вверх, от времени полёта. Ответьте с помощью графика на вопросы:

- 1) С какой высоты был брошен мяч?
- 2) Через какое время мяч достиг максимальной высоты?
- 3) На какую максимальную высоту поднялся мяч?

- 4) На какой высоте находился мяч через 0,5 с полёта? Через какое время после броска мяч ещё раз оказался на этой высоте?
5) Через сколько секунд мяч упал на землю?

2) Дана функция $y = x^2 + 3x + 2$.

- 1) Найдите значение функции при $x = -2$.
2) При каких значениях x функция принимает значение, равное 6?
3) Найдите нули функции.

3) Изобразите схематически в одной координатной плоскости графики функций $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ и $g(x) = -\frac{1}{4}x^2$. Опишите свойства функции $g(x)$. График какой из функций пересекает прямую $y = -400$? Укажите координаты точек пересечения.

Чтобы построить график функции $y = ax^2 + q$, нужно перенести параболу $y = ax^2$ вдоль оси y вверх на отрезок длины q , если $q > 0$, или вниз на отрезок длины $|q|$, если $q < 0$. При этом вершина параболы окажется в точке $(0; q)$.

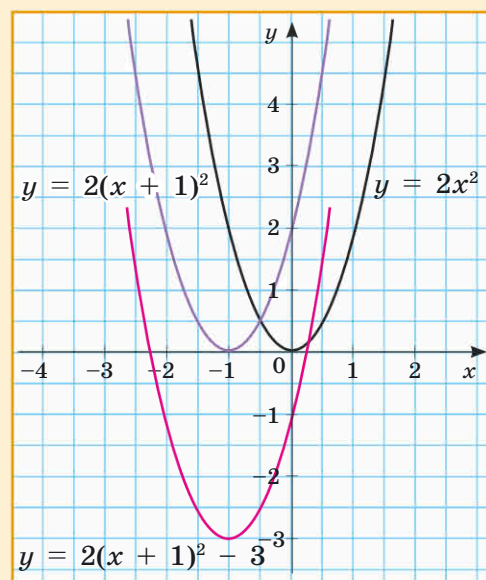
Чтобы построить график функции $y = a(x + p)^2$, нужно перенести параболу $y = ax^2$ влево вдоль оси x на отрезок длины p , если $p > 0$, или вправо на отрезок длины $|p|$, если $p < 0$. При этом вершина параболы окажется в точке $(-p; 0)$.

График функции $y = a(x + p)^2 + q$ можно получить из параболы $y = ax^2$ с помощью двух параллельных переносов: вдоль оси x на $|p|$ единиц (влево или вправо в зависимости от знака числа p) и вдоль оси y на $|q|$ единиц (вверх или вниз в зависимости от знака числа q). Вершиной параболы $y = a(x + p)^2 + q$ будет точка $(-p; q)$.

График функции

$$y = 2(x + 1)^2 - 3$$

получается переносом параболы $y = 2x^2$ вдоль оси x на 1 единицу влево и вдоль оси y на 3 единицы вниз. Вершина параболы в точке $(-1; -3)$.



4) Укажите координаты вершины параболы:

- а) $y = -x^2$; б) $y = 2x^2 - 1$; в) $y = 3(x + 2)^2$; г) $y = 0,5(x - 1)^2 + 4$.

5) Из какой параболы и какими преобразованиями может быть получена парабола $y = -0,5(x - 1)^2 + 2$. Сделайте схематический рисунок.

6) Постройте график функции: а) $y = (x - 2)^2 - 1$; б) $y = -(x + 2)^2 + 4$. В каждом случае укажите:

- 1) наименьшее (или наибольшее) значение функции;
2) промежуток, на котором функция возрастает (убывает).

График функции

$y = ax^2 + bx + c$ — это такая же парабола, что и парабола $y = ax^2$.

У параболы $y = ax^2 + bx + c$:
 — то же направление ветвей,
 что и у параболы $y = ax^2$;
 — вершиной параболы служит

точка с координатами $x = -\frac{b}{2a}$

и $y = \frac{4ac - b^2}{4a}$;

— ось симметрии — вертикальная прямая $x = -\frac{b}{2a}$.

Построим параболу $y = 2x^2 + x - 6$ по плану:

1) вычислим координаты вершины параболы:

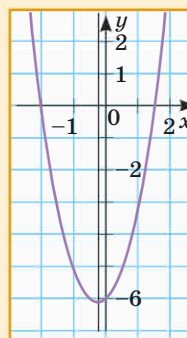
$$x = -0,25; y = -6,125;$$

2) отметим вершину в координатной плоскости и проведём ось симметрии параболы — прямую $x = -0,25$;

3) определим направление ветвей — вверх;

4) вычислим координаты нескольких симметричных точек параболы: $(-2; 0)$ и $(1,5; 0)$, $(-1; -5)$ и $(0,5; -5)$, $(-1,5; -3)$ и $(1; -3)$, отметим их в координатной плоскости;

5) через отмеченные точки проведём плавную линию.



7 Постройте график функции: а) $y = x^2 - 4x - 5$; б) $y = -0,5x^2 + 2x$.

В каждом случае укажите:

1) нули функции;

2) при каком значении x функция принимает наименьшее (или наибольшее) значение;

3) значения x , при которых $y > 0$, $y < 0$.

8 Постройте график функции: а) $y = x^2 - 2x + 3$; б) $y = -x^2 + x - 1$.

В каждом случае опишите свойства функции.

Квадратное неравенство — это неравенство вида

$$ax^2 + bx + c > 0 \text{ или}$$

$$ax^2 + bx + c < 0, \text{ где } a \neq 0.$$

Вместо знаков строгого неравенства могут быть использованы и знаки нестрогого неравенства ($\geq$, $\leq$).

Решать неравенство можно на основе схематического изображения графика

$$y = ax^2 + bx + c$$

(рисунок должен отражать наличие или отсутствие точек пересечения с осью x , направление ветвей).

Решим неравенства, используя график функции $y = x^2 - 3x - 4$:

$$\text{а) } x^2 - 3x - 4 < 0.$$

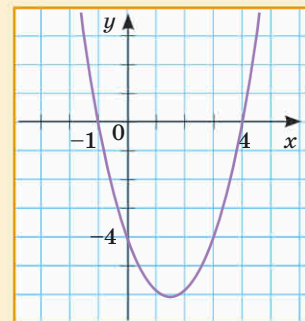
Ответ:

$$(-1; 4).$$

$$\text{б) } x^2 - 3x - 4 > 0.$$

Ответ:

$$(-\infty; -1) \cup (4; +\infty).$$



Решим неравенство $-x^2 - 2x - 3 < 0$.

Заменим его равносильным неравенством $x^2 + 2x + 3 > 0$. Уравнение $x^2 + 2x + 3 = 0$ корней не имеет. Ветви параболы

$$y = x^2 + 2x + 3$$

направлены вверх.

Ответ: $(-\infty; +\infty)$.

9 Решите квадратное неравенство:

$$\text{а) } x^2 + 3x - 28 < 0;$$

$$\text{в) } 2x^2 + 2x > 0;$$

$$\text{д) } x^2 \geq 0,25;$$

$$\text{б) } -2x^2 + 10x - 12 \leq 0;$$

$$\text{г) } x^2 + 2x + 3 \leq 0;$$

$$\text{е) } 3x > x^2.$$

глава 3

УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

- РАЦИОНАЛЬНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ
- ТОЖДЕСТВО
- ЦЕЛЫЕ УРАВНЕНИЯ
- ДРОБНЫЕ УРАВНЕНИЯ
- РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ
- ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ
- АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ
- РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ
- ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Узнайте больше

- ☐ РЕШЕНИЕ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ
- ☐ УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРОМ

НИКОЛАЙ ЛОБАЧЕВСКИЙ

Николай Иванович Лобачевский — гениальный русский математик, основоположник петербургской математической школы, легендарный создатель геометрии, получившей его имя. Показав возможность построения геометрии, отличной от евклидовой, он открыл новую эпоху в развитии математики и науки вообще. Сегодня его идеи находят широкое применение в современной математике и физике, однако при жизни учёного эти идеи не были поняты и приняты современниками. Великий учёный не раз подвергался невежественной критике, но продолжал отстаивать свою правоту.

Вся жизнь Лобачевского была связана с Казанским университетом, где он прошёл путь от студента до ректора. Его усилиями университет стал авторитетным и хорошо оснащённым высшим учебным заведением, одним из лучших в России. Лобачевский утверждал, что «примеры научают лучше, нежели толкования и книги», и его жизнь сама явилась прекрасным примером служения науке и Отечеству.

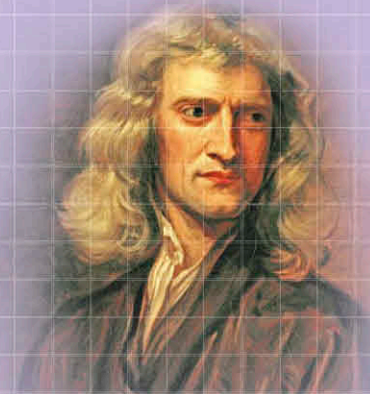
3.1

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Какие выражения называют рациональными.
- На какие классы подразделяются рациональные выражения.
- Что называют областью определения рационального выражения и как её находят.

ВСПОМНИТЕ:

- Правила, по которым выполняют преобразования буквенных выражений.



Исаак Ньютон

1643–1727

Английский математик, механик, астроном, физик.

В книге «Всеобщая Арифметика» И. Ньютон называет буквы, знаки действий, буквенные выражения и уравнения *языком алгебры*. Чтобы решить задачу, пишет Ньютон, нужно лишь «перевести её с обыкновенного языка на язык символических выражений», язык алгебры. Эта книга, изданная в 1707 г., сыграла большую роль в развитии алгебры как науки и как учебного предмета.

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

Исторически источником алгебры послужила задача решения уравнений. Со времён вавилонян, индусов, грека Диофанта и до наших дней она остаётся одной из важнейших целей этой науки. В школьном курсе алгебры обучение приёмам решения уравнений также в центре внимания. Но в ходе решения уравнений часто требуется выполнить действия с многочленами и алгебраическими дробями, разложить выражение на множители. А это означает, что изучение уравнений невозможно без рассмотрения действий над буквенными выражениями.

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ И ИХ ВИДЫ С буквенными выражениями вы работаете постоянно — при вычислениях по формулам, записи общих свойств и правил, составлении и решении уравнений. При этом, как правило, вы имеете дело с так называемыми **рациональными выражениями**.



Рациональным выражением называют алгебраическое выражение, которое составлено из чисел и букв с помощью действий сложения, вычитания, умножения и деления.

Вот примеры рациональных выражений:

$$0,5abc; \quad 3x^2 + xy - y^2; \quad (a - c)(a - b); \quad \frac{x + y}{4};$$

$$\frac{x^2 + y^2}{x + y}; \quad \frac{a}{a + b}; \quad \frac{1}{a + b} \cdot \frac{1}{a - b}; \quad a^{-2} + b^{-2}.$$



Обратите внимание: в этом перечне есть выражения, содержащие степени с натуральными и целыми показателями. Однако это не выводит нас за рамки четырёх арифметических действий: степень с натуральным показателем — это краткая запись произведения одинаковых множителей, а степень с целым отрицательным показателем обозначает дробь.

Кроме рациональных выражений, вам встречались и **иррациональные выражения**. Так называют выражения, в которых хотя бы одна переменная содержится под знаком корня. Например, выражение $\sqrt{2 + x}$ — иррациональное (сравните с похожим на него рациональным выражением $\sqrt{2} + x$). Иррациональные выражения будут рассматриваться в старших классах. Здесь же мы по-прежнему сосредоточимся на рациональных выражениях.

Рациональные выражения подразделяются на **целые** и **дробные**. Их легко различить по «внешнему виду».

! Рациональное выражение, не содержащее деления на выражение с переменной, называется целым выражением.

Рациональное выражение, не являющееся целым (т.е. включающее деление на выражение с переменной), называют дробным выражением.

Посмотрите на примеры выражений на с. 82. Все выражения в первой строке — целые. Среди них есть одночлен, многочлен, произведение многочленов. Понятно, что целым будет любое выражение, составленное из нескольких многочленов (в том числе одночленов), соединённых знаками сложения, вычитания, умножения. Выражения во второй строке целыми не являются, это всё примеры дробных выражений.

ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ РАЦИОНАЛЬНОГО ВЫРАЖЕНИЯ В выражение вместо переменных можно подставлять числа и вычислять его числовое значение (если, конечно, при этих значениях переменных выражение имеет смысл). Те значения переменных, при которых выражение имеет смысл, называют, как известно, *допустимыми*.

! Множество всех допустимых значений переменных называют областью определения выражения.

Целое выражение определено при любых значениях входящих в него переменных. С дробным выражением дело обстоит иначе: оно может иметь смысл не при всех значениях переменных.

Чтобы найти область определения дробного выражения, нужно:

- выяснить, есть ли значения переменных, которые обращают в нуль содержащиеся в выражении делители;
- исключить такие значения переменных из множества всех действительных чисел.

Пример 1. Найдём область определения каждого из выражений: 1) $\frac{a+5}{a^2-2a-8}$; 2) $\frac{a+5}{a^2-2a+8}$.

Для каждой дроби выясним, есть ли значения переменной, при которых её знаменатель равен нулю. Для этого решим уравнения:

$$a^2 - 2a - 8 = 0 \text{ и } a^2 - 2a + 8 = 0.$$

Уравнение $a^2 - 2a - 8 = 0$ имеет два корня: -2 и 4 . Значит, чтобы найти область определения выражения $\frac{a+5}{a^2-2a-8}$, надо исключить эти значения a из множества всех действительных чисел (**рис. 3.1**). Ответ можно записать так: $(-\infty; -2) \cup (-2; 4) \cup (4; +\infty)$. Или короче, указав значения a , не являющиеся допустимыми: $a \neq -2$ и $a \neq 4$.



Задача. Найдём область определения выражения $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

и приведём примеры значений x и y , при которых оно не имеет смысла.

Решение.

1) Хотя бы один из знаменателей равен 0, если $x = 0$, или $y = 0$, или $|x| = |y|$. Область определения — множество пар $(x; y)$, в которых $x \neq 0$, $y \neq 0$, $x \neq y$, $x \neq -y$.

2) Например: $(0; 4)$, $(-2; 0)$, $(-1; 1)$.



Рис. 3.1

В России с действиями над многочленами и с правилами решения уравнений учащиеся знакомились по «Арифметике» Л.Ф. Магницкого (1669–1735). Это первое русское печатное руководство по математике, в котором наряду с систематическим изложением арифметики содержались сведения по алгебре, геометрии, тригонометрии, астрономии и навигации. На главном листе книги изображена доска, на которой записано умножение столбиком двух многочленов:

$$\begin{array}{r} 2R + 1 \\ 3R \div 2 \\ \hline 6q + 3R \\ \div 4R \div 2 \\ \hline 6q \div 1R \div 2 \end{array}$$

Буквой R обозначено неизвестное, буквой q — квадрат неизвестного; знак $\div$ обозначает вычитание. Запишите этот пример современными символами.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

● На какие классы подразделяются рациональные выражения? Приведите примеры выражений каждого класса.

● 1) Что называют областью определения выражения с переменными?
2) Найдите область определения каждого из выражений:

$$(x + 4)(x - 3); \quad \frac{x + 4}{x - 3}; \quad \frac{x - 3}{x + 4}; \quad \frac{1}{(x + 4)(x - 3)}.$$

3) Расскажите, как найти область определения дроби $\frac{a + 2}{a^2 - 2a - 3}$.

● Составьте какое-нибудь дробное выражение с переменной x , которое имеет смысл:

- при любых значениях x ;
- при всех x , кроме $x = 5$;
- при всех x , кроме $x = 0$ и $x = 2$.

Уравнение $a^2 - 2a + 8 = 0$ корней не имеет. Значит, областью определения дроби $\frac{a + 5}{a^2 - 2a + 8}$ является множество всех действительных чисел. В таком случае пишут: $a \in (-\infty; +\infty)$.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ Напомним, что под словами «преобразование выражения» понимают переход от одного выражения к другому, принимающему при любых допустимых значениях букв то же числовое значение, что и исходное. Возможность такого перехода обеспечивают *правила алгебры*. Два выражения — исходное и преобразованное — называют **тождественно равными** (или просто **равными**). Иными словами: *преобразовать выражение — это значит заменить его тождественно равным выражением*.

Целое выражение можно преобразовать, пользуясь правилами действий с многочленами. Сумму, разность и произведение многочленов всегда можно представить в виде многочлена. Поэтому *всякое целое выражение равно некоторому многочлену*.

Пример 2. Преобразуем в многочлен выражение $2b(a + b) - (a + 2b)(b - a)$:

$$\begin{aligned} 2ab + 2b^2 - ab - 2b^2 + a^2 + 2ab &= \\ = a^2 + 3ab. \end{aligned}$$

выполнили умножение и раскрыли скобки;

привели подобные слагаемые.

Таким образом,

$$2b(a + b) - (a + 2b)(b - a) = a^2 + 3ab.$$

Точно так же принятые нами правила действий с алгебраическими дробями позволяют всякое дробное выражение представлять в виде отношения многочленов. Иными словами, *всякое дробное выражение равно некоторой алгебраической дроби*.

Пример 3. Преобразуем в дробь выражение

$$\begin{aligned} &\frac{1}{a^2 + 3a} \cdot \frac{a^2 - 9}{a + 2} - \frac{a + 3}{a^2 - 2a}; \\ 1) &\frac{1}{a(a + 3)} \cdot \frac{(a + 3)(a - 3)}{a + 2} = \\ &= \frac{a - 3}{a(a + 2)}. \\ 2) &\frac{a - 3}{a(a + 2)} - \frac{a + 3}{a(a - 2)} = \\ &= \frac{-10}{(a + 2)(a - 2)} = \frac{10}{4 - a^2}. \end{aligned}$$

выполнили умножение дробей;

выполнили вычитание дробей.

Таким образом,

$$\frac{1}{a^2 + 3a} \cdot \frac{a^2 - 9}{a + 2} - \frac{a + 3}{a^2 - 2a} = \frac{10}{4 - a^2}.$$

УПРАЖНЕНИЯ

НАХОДИМ ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЫРАЖЕНИЯ

197

Дано выражение и указано несколько значений переменной. Все ли они являются допустимыми? Для каждого допустимого значения переменной вычислите соответствующее значение данного выражения:

- а) $\frac{3x-1}{x}$; $x = -1$; 0 ; $\frac{1}{3}$; 3 ; в) $\frac{x}{x^2-1}$; $x = -2$; -1 ; 0 ; 1 ;
 б) $\frac{x^2}{2} - \frac{x}{3}$; $x = -1$; 0 ; $\frac{1}{2}$; 1 ; г) $\frac{x^2+3}{x^2+9}$; $x = -3$; -1 ; 0 ; 3 .

198

Выясните, имеет ли смысл выражение при указанных значениях переменных, и если имеет, вычислите его соответствующее значение:

- а) $\frac{x+y}{xy}$; 1) $x = 5$, $y = -5$; 2) $x = 0$, $y = 3$; 3) $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{2}$;
 б) $\frac{x(x-1)}{y(y-1)}$; 1) $x = 1$, $y = -1$; 2) $x = -1$, $y = 2$; 3) $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{4}$.

Найдите область определения выражения (№ 199, 200):

199

- а) $\frac{a^2-1}{(a+2)(3-a)}$; в) $\frac{a^2-1}{a^2+1}$; д) $\frac{1+a}{1-2a+a^2}$; ж) $(3a+2)^2$;
 б) $\frac{4a}{a^2-4}$; г) $\frac{a-5}{a^2}$; е) $\frac{a+4}{a^2-5a+6}$; з) $2a^{-2}-4$.

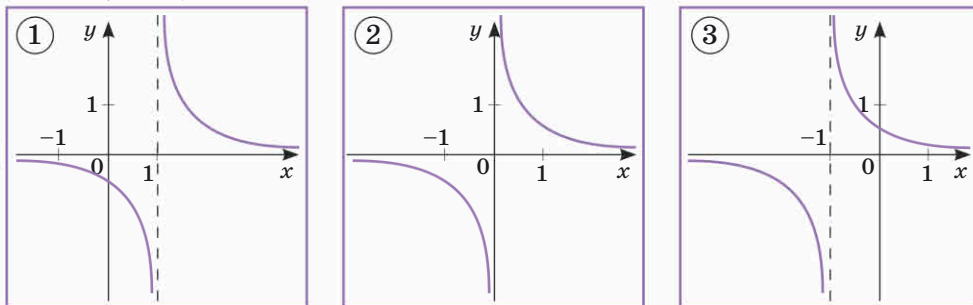
200

- а) $\frac{1}{x} + \frac{x}{x-3}$; б) $2x - \frac{2x}{x+2}$; в) $\frac{x}{x^2-1} - \frac{x}{x+1}$.

201

На рисунке 3.2 схематически изображены гиперболы — графики функций $y = \frac{1}{2x}$, $y = \frac{1}{2(x-1)}$, $y = \frac{1}{2(x+1)}$. Соотнесите каждый график с формулой.

Рис. 3.2

**Неверно!**

Все сформулированные утверждения являются ложными.

Опровергните каждое из них, подобрав соответствующий контр-пример.

- 1) Целое выражение не может быть записано в виде дроби.
- 2) Дробное выражение не может иметь смысл при любых значениях входящих в него переменных.
- 3) Числовое значение целого выражения всегда число целое.
- 4) Числовое значение дробного выражения всегда число дробное.

202

Какова область определения выражения:

- а) $\frac{1+\frac{1}{x}}{1+x}$; б) $\frac{x}{1-\frac{1}{x}}$; в) $\frac{x+3}{x^2-x-20} - \frac{3}{x^2-9}$; г) $\frac{1}{2x^2+x} - \frac{1}{2x^2-x-1}$?

203

Выясните, какова область определения данного выражения, и укажите несколько пар значений переменных, при которых выражение не имеет смысла:

а) $\frac{xy}{x-y}$; б) $\frac{x-y}{x+y}$; в) $\frac{x+2y}{2x-y}$; г) $\frac{x^2+y^2}{xy}$; д) $\frac{x+y}{x^2+y^2}$.

Образец. Областью определения выражения $\frac{xy}{x+2y}$ служит множество пар $(x; y)$, таких, что $x+2y \neq 0$, т.е. таких, в которых $y \neq -\frac{x}{2}$.

204

Для каждой из функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, заданных формулами, укажите соответствующий график, если известно, что:

а) $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ и $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$ (рис. 3.3);

б) $f(x) = \frac{1}{x^2-2x+2}$ и $g(x) = \frac{1}{x^2-2x+1}$ (рис. 3.4).

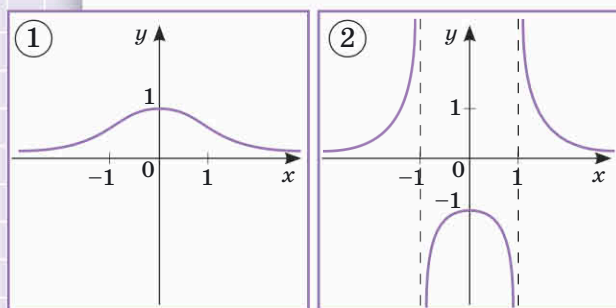
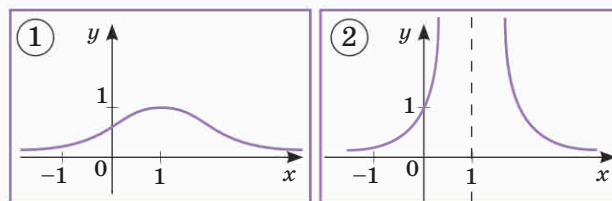


Рис. 3.3

Рис. 3.4



ВЫПОЛНЯЕМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ВЫРАЖЕНИЙ

205

а) Преобразуйте в многочлен выражение

$$(a-b)^2 + (a+b)^2 - (a-b)(a+b).$$

Докажите, что при любых значениях a и b значение выражения неотрицательно.

б) Преобразуйте в многочлен выражение

$$(c+2)(c-2) - (2c-1)(2c+1) + 3.$$

Докажите, что ни при каком значении c значение выражения не может быть числом положительным.

206

а) Преобразуйте в многочлен выражение

$$(2n+1)(n+5) - 2(n+3)(n-3) - (5n+13).$$

Объясните, почему значение этого выражения ни при каком целом n не делится на 6.

б) Преобразуйте в многочлен выражение

$$6(n-2)(n+2) - (3n+2)(2n+3) - (5-18n).$$

Докажите, что значение этого выражения при любом целом значении n есть число, делящееся на 5.

207

Замените в выражении

$$(2n+3)^2 - (n+2)(4n-3) + A$$

букву A таким многочленом, чтобы числовое значение получившегося выражения при любом целом n делилось на 3. Дайте несколько ответов.

Неверно!

Найдите ошибки, если они есть, и исправьте их:

1) $\frac{y-x}{2y-x} = -\frac{x-y}{x-2y}$; 2) $\frac{(b-a)^2}{ab(a-b)^2} = \frac{1}{ab}$; 3) $\frac{m^2-n^2}{m(n-m)} = \frac{m+n}{m}$.

208

Выполните действие:

а) $\frac{a+1}{a^2-a} - \frac{a-1}{a^2+a}$; б) $\frac{c^2-16}{c^2-2c} \cdot \frac{c-2}{c^2+4c}$; в) $\frac{(a-c)^2}{ac+c^2} : \frac{a^2-c^2}{c}$.

209

Упростите выражение:

а) $x - y - \frac{(x+y)^2}{x-y}$; б) $\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2} : (x+y)$; в) $\frac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2} \cdot (x-y)$.

210

Представьте в виде отношения многочленов выражение:

а) $\frac{1-\frac{1}{c}}{1+\frac{1}{c}}$; б) $\frac{\frac{2a-b}{b}+1}{1+\frac{2a+b}{b}}$; в) $\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}}$.

211

Преобразуйте в дробь выражение:

а) $\left(\frac{c}{a-c} + \frac{a+c}{c}\right) : \frac{a}{a^2-c^2}$; г) $\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 2\right) : \left(x + 2y + \frac{y^2}{x}\right)$;
 б) $\frac{ab}{a^2-b^2} : \frac{ab}{a+b} - \frac{b}{a^2-b^2}$; д) $\left(y - \frac{y^2}{y+1}\right) : \left(y - \frac{y}{y+1}\right)$;
 в) $\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right) \cdot \left(\frac{a}{a-b} - \frac{a}{a+b}\right)$; е) $\left(\frac{1}{x-y} - \frac{1}{x+y}\right) : \left(\frac{1}{x-y} + \frac{1}{x+y}\right)$.

212

Вычислите значение выражения при тех значениях переменных из приведённого перечня, которые являются допустимыми:

а) $\frac{c^2-25}{10c} \cdot \frac{c}{c-5}$; $c = -37; -5; 0; 2,5$;
 б) $\frac{a}{a-c} \cdot \left(\frac{a-c}{a} - 1\right)$; $a = -15$ и $c = -18$; $a = 0$ и $c = 10$; $a = 10$ и $c = 0$;
 в) $\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right) \cdot \frac{xy}{x-y}$; $x = \frac{1}{6}$ и $y = -\frac{2}{3}$; $x = 0$ и $y = 22$; $x = 5$ и $y = 5$;
 г) $\frac{a^2+4}{a^2-4} - \frac{a}{a+2}$; $a = -4; -2; 2; \frac{2}{3}$.

213

Выполните подстановку $a = \frac{xy}{x+y}$, $b = \frac{xy}{x-y}$ и упростите выражение:

1) $a + b$; 2) $b - a$; 3) ab ; 4) $\frac{ab}{a+b}$; 5) $\frac{b-a}{ab}$.

Упростите выражение (№ 214, 215):

214

а) $\frac{2}{3-a} + \frac{a^2-4}{a^2-9} \cdot \frac{a+3}{a-2}$; в) $\left(\frac{2}{a} - \frac{a}{2}\right) \cdot \frac{a}{6a-12}$;
 б) $\frac{16-a^2}{16a^2} \cdot \left(\frac{a-4}{a+4} - \frac{a+4}{a-4}\right)$; г) $\frac{1-a}{2a} : \left(1 - \frac{2}{a} + \frac{1}{a^2}\right)$.

215

а) $\frac{6}{x^2+x-2} + \frac{2}{x+2}$; б) $\frac{1}{y+3} + \frac{2}{y^2+4y+3}$; в) $\frac{1}{x-5} - \frac{x+3}{x^2-x-20}$.

216

ЗАДАЧА-ИССЛЕДОВАНИЕ

1) Известно, что в выражении $x^2 - 2xy - y^2$ переменные x и y связаны соотношением $x + y = 1$. Выясним, каково наименьшее значение этого выражения и при каких значениях x и y оно достигается.

Решение. Из условия $x + y = 1$ следует, что $y = 1 - x$. Подставив в выражение $x^2 - 2xy - y^2$ вместо y двучлен $1 - x$, получим

$$x^2 - 2x(1-x) - (1-x)^2 = 2x^2 - 1.$$

Наименьшее значение выражения $2x^2 - 1$ равно -1 , оно достигается при $x = 0$. Значит, и наименьшее значение многочлена $x^2 - 2xy - y^2$, где $x + y = 1$, тоже равно -1 ; оно достигается при $x = 0$ и $y = 1$.

2) Найдите наибольшее значение выражения $y^2 - 2xy - x^2$, если известно, что $x - y = 2$. При каких x и y оно достигается?

3.2

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Что в математике понимают под словом «тождество».
- Что означает требование «доказать тождество» и как тождества доказывают.
- Как можно доказать, что равенство тождеством не является.

Равенства, выражающие свойства арифметических действий, такие, как $a + b = b + a$, $a(b + c) = ab + ac$, $a + 0 = a$, формулы сокращённого умножения — это тождества.

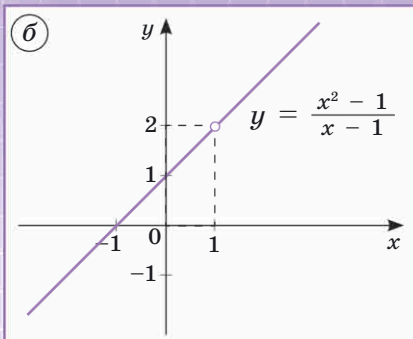
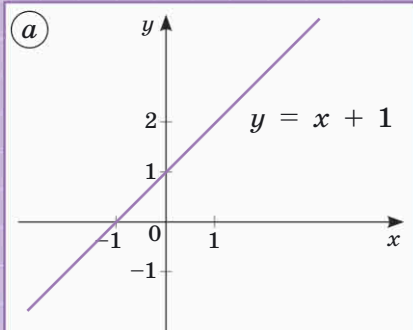


Рис. 3.5

ТОЖДЕСТВО

Слово «тождественно» и родственные с ним слова в русском языке употребляют в тех случаях, когда хотят подчеркнуть абсолютное совпадение чего-либо с чем-либо. Используется оно и в математическом языке как название одного из важнейших понятий этой науки.

ЧТО ТАКОЕ ТОЖДЕСТВО Посмотрите на примеры преобразования выражений:

$$5ab - 4ab = ab, \quad 2ab + 4ac = 2a(b + 2c), \\ (a - b) = -(b - a).$$

В каждом из равенств левая и правая части — тождественно равные выражения. Такие равенства называют **тождествами**. Иными словами:

тождество — это равенство, которое обращается в верное числовое равенство при всех значениях переменных, при которых обе его части имеют смысл.

Возьмём два очевидных тождества:

$$(x - 1)(x + 1) = x^2 - 1 \text{ и } \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1.$$

Обе части первого тождества имеют смысл при всех значениях переменной x , и при любом x их соответственные значения одинаковы.

Со вторым тождеством ситуация иная. При $x = 1$ его левая часть не определена, а правая смысл имеет (её значение равно 2). Так получилось потому, что при сокращении дроби $\frac{x^2 - 1}{x - 1}$ область определения выражения стала шире. При всех значениях x , отличных от 1, их значения одинаковы.

Вы видите, что у тождественно равных выражений области определения могут не совпадать. Однако при всех значениях переменных, при которых оба выражения имеют смысл, их числовые значения одинаковы.

Различие тождественно равных выражений $\frac{x^2 - 1}{x - 1}$ и $x + 1$ особенно хорошо видно на графиках. График функции $y = x + 1$ — прямая (рис. 3.5, а). График функции $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ — та же прямая, но без точки с координатами $x = 1$, $y = 2$ (рис. 3.5, б).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТОЖДЕСТВ Часто в алгебре ставится задача: «Доказать, что равенство является тождеством», или короче: «Доказать тождество». В таких случаях нужно убедиться в том, что одну часть равенства можно получить из другой с помощью преобразований или что обе части равенства можно привести к одному и тому же выражению.

Пример 1. Докажем тождество

$$x^8 - y^8 = (x - y)(x + y)(x^2 + y^2)(x^4 + y^4).$$

Способ 1. Разложим на множители двучлен в левой части. Для этого трижды применим формулу разности квадратов:

$$\begin{aligned} x^8 - y^8 &= (x^4)^2 - (y^4)^2 = (x^4 - y^4)(x^4 + y^4) = \\ &= ((x^2)^2 - (y^2)^2)(x^4 + y^4) = \\ &= (x^2 - y^2)(x^2 + y^2)(x^4 + y^4) = \\ &= (x - y)(x + y)(x^2 + y^2)(x^4 + y^4). \end{aligned}$$

Получили правую часть равенства. Тождество доказано.

Способ 2. Преобразуем в многочлен произведение в правой части равенства:

$$\begin{aligned} (x - y)(x + y)(x^2 + y^2)(x^4 + y^4) &= \\ = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2)(x^4 + y^4) &= (x^4 - y^4)(x^4 + y^4) = \\ = x^8 - y^8. \end{aligned}$$

Получили левую часть равенства. Тождество доказано.

В приведённом примере мы заранее знали, что рассматриваемое равенство — это тождество. Но может быть и так, что дано некоторое равенство и изначально неизвестно, тождество оно или нет. Как это узнать?

Можно подставить «на пробу» какие-то значения переменных и выполнить вычисления. Если хоть раз слева и справа получатся разные числа, то это не тождество. Если же числовые значения будут совпадать, то есть основания предположить, что мы имеем тождество. Но это предположение нужно ещё доказать (или опровергнуть!). А для этого придётся выполнить преобразования.

Пример 2. Выясним, является ли тождеством равенство $(x + 1)(x - 1)(x - 3) = x^3 + 3x^2 - x - 3$.

Подставим в его левую и правую части $x = -1$; получим верное равенство $0 = 0$. Точно так же при $x = 1$ и слева, и справа получится 0. Так, может быть, это — тождество? Но, выполнив пробу ещё и при $x = 3$, мы придём к неверному равенству $0 = 48$. Таким образом, данное равенство — не тождество.

К этому же выводу можно было бы прийти с помощью преобразований.

Правая часть равенства — это многочлен стандартного вида. Преобразуем в многочлен стандартного вида его левую часть:

$$\begin{aligned} (x + 1)(x - 1)(x - 3) &= (x^2 - 1)(x - 3) = \\ &= x^3 - 3x^2 - x + 3. \end{aligned}$$

Очевидно, что многочлены

$$x^3 - 3x^2 - x + 3 \text{ и } x^3 + 3x^2 - x - 3$$

различны; у них есть члены, отличающиеся знаками. Значит, данное равенство не тождество.

Считают, что знак «=» для обозначения равенства ввёл английский математик Роберт Рекорд (1510–1558). Он писал, что «ничто не может быть более равным, чем два расположенных друг под другом параллельных отрезка одинаковой длины». До этого математики при записи равенств использовали обычный язык; например, писали *et* (в переводе с латыни — есть): $2 \cdot 3 \text{ et } 6$.

А для записи тождеств с середины XIX в. наряду со знаком «=» стали иногда использовать знак « $\equiv$ » (читается: «тождественно равно»). Его применение в таком качестве ввёл немецкий математик Бернхард Риман (1826–1866).

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

● Дайте определение понятия тождества. Приведите примеры тождеств.

● Как доказывают тождества? Проиллюстрируйте свой ответ на примере тождества

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

● Докажите, что равенство $(a - 1)(a - 2)(a - 3) = (1 - a)(2 - a)(3 - a)$

тождеством не является.

● 1) Запишите формулу куба суммы (см. упр. 222) и доказите её.

2) Преобразуйте в многочлен выражение $(a - b)^3$. Вы получили формулу куба разности.

УПРАЖНЕНИЯ

РАСПОЗНАЁМ И ЗАПИСЫВАЕМ ТОЖДЕСТВА

217

Запишите тождество, выражающее свойство: 1) 0 при сложении; 2) 1 при умножении; 3) -1 при умножении; 4) 0 при умножении.

218

Свойства действий и правила преобразований на алгебраическом языке записывают в виде тождеств. Пользуясь тождествами $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$ и $\frac{a-b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}$, представьте данную дробь в виде суммы или в виде разности дробей:

а) $\frac{a^2 + 3ac}{a^3}$; б) $\frac{12a - c^2}{6ac}$; в) $\frac{a^2 + b^2}{2ab}$; г) $\frac{a^2 - c^2}{ac}$.

219

На основании какого свойства выполнено преобразование? Запишите тождество, выражающее это свойство:

а) $y(5x) = 5xy$; б) $2z + 3z = 5z$; в) $-2(-x) = 2x$; г) $\frac{xy}{xz} = \frac{y}{z}$; д) $\frac{-x}{4} = -\frac{x}{4}$.

220

Восстановите пропущенные числители и знаменатели дробей так, чтобы получилось тождество:

а) $\frac{\quad}{y^2} + \frac{1}{\quad} = \frac{x^2 + y^2}{x^2 y^2}$; в) $\frac{2a^2}{\quad} + \frac{\quad}{2} = \frac{4a^2 + 25b^2}{10b}$;

б) $\frac{\quad}{c^2} + \frac{\quad}{3} = \frac{9 + c^2}{3c^2}$; г) $\frac{\quad}{4y} + \frac{4y}{\quad} = \frac{49x^2 + 16y^2}{28xy}$.

221

1) Докажите, что каждое из выражений

$$(x+1)^2(x-1)^2, \quad (x^2+2x+1)(x^2-2x+1), \quad (x^2-1)^2$$

тождественно равно многочлену $x^4 - 2x^2 + 1$.

2) Какое из выражений

$$(x-3)^2(x+3)^2, \quad (x-3)^2(x+3), \quad (3+x)(3-x)^2, \quad (x^2-9)(x-3)$$

является «лишним»?

222

Тождество $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ называют *формулой куба суммы*. Запишите новое тождество, которое получится при подстановке в эту формулу:

а) $a = x$, $b = -y$; б) $a = -2x$, $b = 3y$.

Неверно!

Ученик должен был привести примеры тождеств. Вот что он записал:

$$4 - 4a + a^2 = (a-2)^2; \quad (1-a)^2(5-a) = (a-1)^2(5-a);$$

$$(3+a)(a-3) = a^2 - 9; \quad \frac{a-1}{(b-1)(c-1)} = \frac{1-a}{(1-b)(1-c)}.$$

Его одноклассник сказал, что тождеств здесь нет. Кто из них прав?

ДОКАЗЫВАЕМ ТОЖДЕСТВА

Докажите тождество (№ 223–225):

223

а) $(x-y)^2 + (x+y)^2 - 2(x-y)(x+y) = 4y^2$;
б) $2(x+y)(x-y) + (x+y)^2 + (x-y)^2 = 4x^2$.

224

а) $(m-1)(m+1)(m^2+1) - (m^2-1)^2 - m^2 = m^2 - 2$;
б) $(a^2+3)^2 - (a-3)(a+3)(a^2+9) = 6(a^2+15)$.

225

$$\begin{aligned} \text{а) } \frac{a+b}{a-b} - \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} &= \frac{2ab}{a^2-b^2}; & \text{в) } \frac{x+y}{x^2-2xy+y^2} - \frac{1}{2x-2y} &= \frac{x+3y}{2(x-y)^2}; \\ \text{б) } \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{2}{xy}\right) \cdot \frac{xy^2}{x+y} &= 1 + \frac{y}{x}; & \text{г) } \frac{1}{ab-b^2} - \frac{1}{a^2+ab} - \frac{2}{a^2-b^2} &= \frac{a-b}{ab(a+b)}. \end{aligned}$$

226

С помощью числовой подстановки докажите, что равенство тождеством не является:

$$\begin{aligned} \text{а) } (x+1)^2 &= x^2 + 1; & \text{в) } (x-5)(3-x) &= -(5-x)(x-3); \\ \text{б) } x^2 - x - 6 &= (x-2)(x+3); & \text{г) } (3-x)^2 &= -(x-3)^2. \end{aligned}$$

227

Докажите тождество $\frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-a)(b-c)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)} = 0$.

Совет. Преобразуйте левую часть равенства так, чтобы в знаменатели входили множители $a-b$, $b-c$ и $a-c$ (а не противоположные им).

228

Докажите тождество $\frac{bc}{(a-b)(a-c)} + \frac{ac}{(b-a)(b-c)} + \frac{ab}{(c-a)(c-b)} = 1$.

Совет. Сначала сложите первые две дроби.

229

Докажите тождество:

$$\begin{aligned} \text{а) } \frac{\left(1 + \frac{a-b}{a+b}\right)\left(1 + \frac{b-c}{b+c}\right)\left(1 + \frac{c-a}{c+a}\right)}{\left(1 - \frac{a-b}{a+b}\right)\left(1 - \frac{b-c}{b+c}\right)\left(1 - \frac{c-a}{c+a}\right)} &= 1; \\ \text{б) } \frac{\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \cdot \frac{bc+ac+ab}{abc} &= \frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}. \end{aligned}$$

СТРОИМ ГРАФИКИ

230

1) Докажите тождество $\frac{(1-x)^2}{x-1} = x-1$.

Какова область определения его левой части? правой части?

2) Постройте графики функций

$$y = x-1 \text{ и } y = \frac{(1-x)^2}{x-1}.$$

231

Постройте график функции:

$$\begin{aligned} \text{а) } y &= \frac{x^2-4}{x+2}; & \text{в) } y &= \frac{x-1}{x^2-x}; \\ \text{б) } y &= \frac{x^2-4x-5}{x+1}; & \text{г) } y &= \frac{x^4-1}{x^2-1}. \end{aligned}$$

Формулы сокращённого умножения

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 + b^3$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$$

232

ЗАДАЧА-ИССЛЕДОВАНИЕ

Для каждого из выражений

$$A_1 = \left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2, \quad A_2 = \frac{(a+b)^2}{a^2+b^2}, \quad A_3 = \frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b}$$

найдите тождественно равное среди выражений

$$B_1 = 2 + \frac{4b^2}{a^2-b^2}, \quad B_2 = 1 + \frac{4ab}{a^2-2ab+b^2}, \quad B_3 = 2 - \frac{(a-b)^2}{a^2+b^2}.$$

Запишите и докажите соответствующие тождества.

3.3

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Какое уравнение называют целым уравнением.
- Как определяют степень целого уравнения.
- Какие приёмы можно использовать для решения уравнений третьей и четвёртой степени.

ЦЕЛЫЕ УРАВНЕНИЯ

Обратимся вновь к уравнениям с одной переменной. Чтобы записать уравнение, берут два выражения, из которых по крайней мере одно содержит переменную, и соединяют их знаком «=». Как всякое предложение, содержащее переменную, это равенство при одних условиях может быть истинным, а при других — ложным. Термином *уравнение* пользуются только в случае, когда интересуются значениями, при которых равенство истинно. Такие значения, как вы знаете, называют *корнями уравнения*.

ЦЕЛОЕ УРАВНЕНИЕ И ЕГО СТЕПЕНЬ В каждом из уравнений

$$(x + 1)(1 + 3x) = x^2(2 - x) \quad \text{и} \quad \frac{x^2 - 4}{2} - x = 5$$

обе части являются целыми выражениями. Такие уравнения называют **целыми уравнениями**. А, например, уравнение $\frac{3}{x} + x = 1$ целым не является: его левая часть — дробное выражение.



Уравнение с одной переменной называется **целым уравнением**, если обе его части являются целыми выражениями.

Всякое целое уравнение с одной переменной можно преобразовать в равносильное ему уравнение вида $P(x) = 0$, где $P(x)$ — многочлен стандартного вида. Представим, например, в таком виде уравнение

$$x^2(x - 1) + 4 = x(8 - x^2);$$

$$x^3 - x^2 + 4 = 8x - x^3$$

$$x^3 - x^2 + 4 - 8x + x^3 = 0$$

$$\underbrace{2x^3 - x^2 - 8x + 4}_{P(x)} = 0$$

раскрыли скобки;
перенесли все члены
в левую часть;
привели подобные
слагаемые.

Наибольший показатель степени, в которой переменная x содержится в многочлене $2x^3 - x^2 - 8x + 4$ равен 3, значит, это многочлен третьей степени. Поэтому и уравнение $2x^3 - x^2 - 8x + 4 = 0$ называют *уравнением третьей степени*.

Точно так же уравнение $x^4 + 2x^2 - 15 = 0$ называют *уравнением четвёртой степени*, а уравнение $x^5 + 4x^3 = 0$ — *уравнением пятой степени*.



Если уравнение с одной переменной записано в виде $P(x) = 0$, где $P(x)$ — многочлен стандартного вида, то степень этого многочлена называют **степенью уравнения** $P(x) = 0$.

Если квадратные уравнения умели решать ещё математики Вавилонии и Древней Индии, то проблема решения уравнения третьей степени на протяжении многих веков представлялась математикам неразрешимой. Формула корней кубического уравнения была найдена усилиями итальянских математиков дель Ферро и Н. Тартальи лишь в XVI в. А опубликовал её в 1545 г. другой итальянец — Дж. Кардано — в книге о новейших достижениях алгебры под названием «Великое искусство». Поэтому эта формула известна как *формула Кардано*.

Метод решения уравнения четвёртой степени открыл в XVI в. ещё один итальянец — Л. Феррари, ученик Дж. Кардано. Он сумел найти приём, сводящий уравнение четвёртой степени к решению уравнения третьей степени.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕЙ И ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ

Вам известны приёмы решения уравнений первой и второй степени, т.е. уравнений вида $ax + b = 0$, где $a \neq 0$, и $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$. Их называют соответственно линейными и квадратными. Для квадратного уравнения существует *формула корней*, указывающая, какие действия надо выполнить с его коэффициентами, чтобы вычислить корни. Что же касается уравнений более высокого порядка, то их вы сможете решить только в некоторых частных случаях. Дело в том, что уже для уравнений пятой степени общей формулы корней вообще не существует. Для уравнений третьей и четвёртой степени такие формулы имеются. Но они настолько сложны, что на практике ими не пользуются.

И все же некоторые «хорошие» уравнения третьей и четвёртой степени вы решать сможете, используя специальные приёмы, позволяющие свести данное уравнение к линейным или квадратным уравнениям. Одним из таких приёмов является *разложение на множители*.

Пример 1. Решим уравнение $2x^3 - x^2 - 8x + 4 = 0$.

Разложим левую часть уравнения на множители:

$$2x^3 - x^2 - 8x + 4 = x^2(2x - 1) - 4(2x - 1) = (2x - 1)(x^2 - 4) = (2x - 1)(x - 2)(x + 2).$$

Получим равносильное уравнение

$$(2x - 1)(x - 2)(x + 2) = 0.$$

Из условия равенства нулю произведения следует: или $2x - 1 = 0$, или $x - 2 = 0$, или $x + 2 = 0$.

Корень каждого из этих линейных уравнений является корнем данного уравнения, и других корней оно не имеет. Решив линейные уравнения, найдём:

$$x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 2, x_3 = -2.$$

Таким образом, уравнение $2x^3 - x^2 - 8x + 4 = 0$ имеет три корня.

Другой приём решения уравнений высших степеней — это *введение новой переменной*. Его, в частности, используют для решения **биквадратных уравнений**. Биквадратным называют уравнение вида

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \quad (a \neq 0).$$

Оно является квадратным по отношению к x^2 .

Пример 2. Решим уравнение $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$.

Введём замену $x^2 = t$. Получим квадратное уравнение относительно переменной t : $4t^2 - 5t + 1 = 0$. Решив его, найдём, что $t_1 = 1$, $t_2 = \frac{1}{4}$.

Теперь вернёмся к переменной x . Приходим к двум квадратным уравнениям: $x^2 = 1$ и $x^2 = \frac{1}{4}$.

Из уравнения $x^2 = 1$ находим $x_1 = -1$, $x_2 = 1$; из уравнения $x^2 = \frac{1}{4}$ получаем $x_3 = -\frac{1}{2}$, $x_4 = \frac{1}{2}$. Таким образом, уравнение $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$ имеет четыре корня.

После того как итальянские алгебраисты открыли формулы корней уравнений третьей и четвёртой степени, естественно возник вопрос: а есть ли подобные формулы для решения уравнений пятой степени и выше? Ответ на него смог найти в начале XIX в. норвежский математик Н.Х. Абель (а чуть раньше, но без достаточного обоснования итальянец П. Руффини). Абель доказал, что общей формулы корней для уравнений выше четвёртой степени не существует.



Нильс Хенрик Абель
1802–1829

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

● Какое из уравнений —

$$\frac{3}{x} - \frac{x-1}{2} = 1 \quad \text{или} \quad \frac{x}{3} - \frac{x-1}{2} = \frac{1}{2}$$

является целым?

● 1) Приведите примеры уравнений вида

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, ($a \neq 0$), в которых: $c = 0$ и $d = 0$; $b = 0$ и $c = 0$. Какова степень этих уравнений?

2) Запишите в общем виде уравнение четвёртой степени и приведите конкретные примеры.

● 1) Какие приёмы используют для решения уравнений третьей и четвёртой степени?

2) Решите уравнения $x^3 + 2x^2 = 0$ и $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$.

УПРАЖНЕНИЯ

НАХОДИМ СТЕПЕНЬ ЦЕЛОГО УРАВНЕНИЯ

233

Определите степень каждого уравнения:

$$x^2 - 2x = 0, \quad 2x^2 - x^3 + 1 = 0, \quad 0,5x^4 = 0, \quad 10x - 12 = 0, \quad 6x^3 - x^5 + x^4 = 0.$$

234

Степенью произвольного целого уравнения называют степень равносильного ему уравнения $P(x) = 0$, где $P(x)$ — многочлен стандартного вида. Преобразуйте уравнение в равносильное уравнение указанного вида и определите его степень:

а) $(x + 3)(x - 7) = 2(x - 13)$; в) $(x^2 - 3x)(x + 3)^2 = 0$;

б) $(x - 5)(x + 4) = (x - 2)^2$; г) $\frac{x + 8}{8} - x = \frac{1 - x^2}{4}$.

Найдите в перечне уравнения второй степени и решите их.

РЕШАЕМ УРАВНЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ РАЗЛОЖЕНИЯ НА МНОЖИТЕЛИ

235

Найдите корни уравнения:

а) $(x - 1)(x + 2)(x + 10) = 0$; г) $3x(10x - 1)(1 - x) = 0$;

б) $(3x + 6)(2x - 5)(x - 5) = 0$; д) $(x - 5)(x + 3)^2 = 0$;

в) $(x - 2)(x^2 + 3) = 0$; е) $-2x(x - 4)(x^2 + 1) = 0$.

236

Какое из уравнений имеет три корня, равные 1, -1 и 2?

1) $(x^2 - 1)(x + 2) = 0$; 2) $(x - 2)(x^2 - 1) = 0$; 3) $(x + 1)^2(x - 2) = 0$.

237

1) Убедитесь, что все данные уравнения равносильны:

$$5x(x + 1)(x - 2) = 0, \quad x(x + 1)^2(x - 2) = 0, \quad x(x + 1)(2 - x)(x^2 + 1) = 0.$$

2) Составьте несколько равносильных уравнений, корнями которых являются числа: а) 0; -3; 4; б) 0; -1; -2; 3.

Решите уравнение (№ 238–239):

238

а) $x^3 - 4x = 0$;

в) $x^3 - 2x^2 + x = 0$;

д) $81x^2 - x^4 = 0$;

б) $5x + 5x^3 = 0$;

г) $x^3 - 4x^2 + 3x = 0$;

е) $9x^2 = x^4$.

239

а) $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$;

в) $2x^3 + x^2 + 6x + 3 = 0$;

б) $3x^3 - x^2 - 27x + 9 = 0$;

г) $5x^3 - x^2 + 20x - 4 = 0$.

240

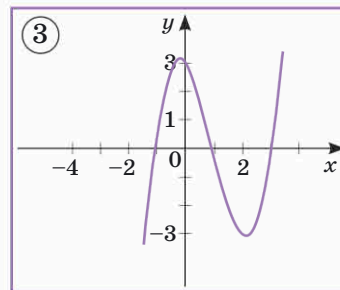
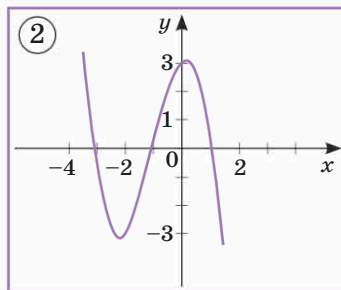
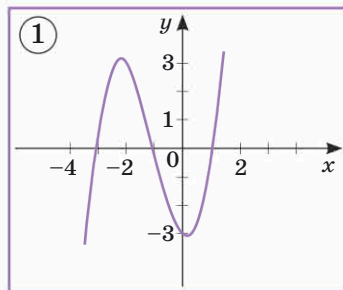
На рисунке 3.6 изображены графики функций:

$$f(x) = (x - 1)(x + 1)(x - 3), \quad g(x) = (x + 1)(x - 1)(x + 3),$$

$$p(x) = -(x + 1)(x - 1)(x + 3).$$

Соотнесите каждый график с формулой.

Рис. 3.6



241

Найдите координаты точек пересечения графика функции $y = f(x)$ с осью x :
а) $f(x) = x^3 - 5x^2 - 4x + 20$; б) $f(x) = -x^3 + 6x^2 + 8x - 48$.

РЕШАЕМ БИКВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

242

Решите биквадратное уравнение:

- а) $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$; г) $x^4 - 6x^2 + 9 = 0$;
б) $4x^4 + 3x^2 - 1 = 0$; д) $x^4 + 3x^2 = 0$;
в) $2x^4 + 9x^2 + 4 = 0$; е) $x^4 - 9x^2 = 0$.

243

Определите, пересекает ли график функции $y = f(x)$ ось x , и если да, то в каких точках. Изобразите схематически график из задания (а).

- а) $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$; б) $f(x) = x^4 + 4x^2 + 3$; в) $f(x) = x^4 - 20x^2 + 100$.

244

Разложите на множители трёхчлен:

- а) $x^4 - 5x^2 + 4$; б) $x^4 - 4x^2 - 45$.

РЕШАЕМ УРАВНЕНИЯ МЕТОДОМ ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННОЙ

Подберите подходящую замену и решите уравнение (№ 245–247):

245

- а) $(2x - 5)^2 + (2x - 5) - 6 = 0$; б) $(2x + 3)^2 + 4x + 7 = 0$.

Совет. Введите замену: а) $2x - 5 = y$; б) $2x + 3 = y$.

246

- а) $(x^2 + 5)^2 - 11(x^2 + 5) + 28 = 0$; б) $(2x^2 + 3)^2 - 12(2x^2 + 3) + 11 = 0$.

247

- а) $(x^2 + 3x)^2 + 2(x^2 + 3x) - 24 = 0$; в) $(x^2 + x)(x^2 + x - 8) = -12$;
б) $(x^2 + x + 1)^2 + 2(x^2 + x + 1) - 3 = 0$; г) $(x^2 - 4x + 2)(x^2 - 4x - 2) = 5$.

248

Укажите замену, которая приводит уравнение к квадратному (предложите разные варианты):

- а) $(x^2 + 2x - 1)^2 + x^2 + 2x - 7 = 0$;
б) $(x^2 - 5x + 2)(x^2 - 5x - 1) = 28$;
в) $(x^2 + x + 1)(2x^2 + 2x + 3) = 3(1 - x - x^2)$;
г) $((2x - 1)(3x - 2))((2x + 3)(3x - 8)) + 25 = 0$.

Решите одно или два уравнения на ваш выбор.

249

ЗАДАЧА-ИССЛЕДОВАНИЕ

1) Квадратное уравнение, в которое превращается после замены переменной биквадратное уравнение, называют *резольвентным* (т.е. *разрешающим*). Проанализируйте результаты, полученные при решении уравнений из № 241, и ответьте на вопросы:

- Какими должны быть корни резольвентного уравнения, чтобы биквадратное уравнение имело 4 корня? 2 корня?
 - В каких случаях биквадратное уравнение не будет иметь корней?
 - При каком условии биквадратное уравнение будет иметь 1 корень? 3 корня?
- 2) Составьте биквадратное уравнение, имеющее: 4 корня, 2 корня, не имеющее корней.

3.4

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Алгоритм решения дробных уравнений.
- Почему при решении дробных уравнений необходима проверка.
- Приёмы рассуждений при решении некоторых частных видов дробных уравнений.

Впервые буквенные обозначения для неизвестного и его степеней ввёл древнегреческий математик Диофант Александрийский. Сохранился текст эпитафии (надписи на надгробном камне) на могиле Диофанта в виде задачи-загадки. Решите её, составив уравнение, и вы узнаете, сколько лет прожил Диофант.

Прах Диофанта гробница покойт:
дивись ей — и камень
Мудрым искусством его
скажет усопшего век.
Волей богов шестую часть жизни
он прожил ребёнком
И половину шестой
встретил с пушком на щеках.
Только минула седьмая,
с подругою он обручился.
С нею пять лет проведя,
сына дождался мудрец.
Только полжизни отцовской
возлюбленный сын его прожил —
Отнят он был у отца
ранней могилою своей.
Дважды два года родитель
оплакивал тяжкое горе,
Тут и увидел предел
жизни печальной своей.

ДРОБНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В этом пункте мы продолжим знакомство с приёмами решений уравнений с одной переменной. Но теперь это будут уравнения, в которые входят рациональные выражения, содержащие переменную в знаменателе дроби. Нетрудно догадаться, что такие уравнения называют *дробными*. Вы увидите, что переменная в знаменателе «диктует» своё особое требование к процессу решения.

ВАЖНАЯ ОСОБЕННОСТЬ ДРОБНЫХ УРАВНЕНИЙ Решим два уравнения:

$$1) \frac{x^2 + x}{3} - \frac{x - 2}{2} = 2; \quad 2) \frac{2x}{x - 3} + \frac{6}{(x - 3)(x - 4)} = \frac{x}{x - 4}.$$

Первое из этих уравнений целое, второе — дробное. Однако каждое из них содержит дроби, поэтому при решении этих уравнений естественно воспользоваться одним и тем же приёмом — избавиться от дробей.

1) Умножив обе части первого уравнения на 6 — наименьший общий знаменатель дробей, получим

$$\begin{aligned} \frac{(x^2 + x) \cdot 6}{3} - \frac{(x - 2) \cdot 6}{2} &= 2 \cdot 6, \\ 2(x^2 + x) - 3(x - 2) &= 12, \\ 2x^2 - x - 6 &= 0. \end{aligned}$$

Квадратное уравнение $2x^2 - x - 6 = 0$ имеет два корня: $x_1 = 2$ и $x_2 = -\frac{3}{2}$. Эти же числа являются корнями исходного уравнения.

2) Чтобы избавиться от дробей во втором случае, умножим обе части уравнения на простейший общий знаменатель дробей, входящих в уравнение, т.е. на произведение $(x - 3)(x - 4)$. Получим

$$\begin{aligned} \frac{2x(x - 3)(x - 4)}{x - 3} + \frac{6(x - 3)(x - 4)}{(x - 3)(x - 4)} &= \frac{x(x - 3)(x - 4)}{x - 4}, \\ 2x(x - 4) + 6 &= x(x - 3), \\ x^2 - 5x + 6 &= 0. \end{aligned}$$

Уравнение $x^2 - 5x + 6 = 0$ тоже имеет два корня: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. Однако число 3 корнем исходного уравнения быть не может. В самом деле, при $x = 3$ знаменатели дробей в левой части уравнения обращаются в нуль, т.е. при $x = 3$ эти дроби не имеют смысла.

Другой корень — число 2 — является и корнем исходного уравнения. В этом легко убедиться, подставив число 2 в его левую и правую части:

$$\frac{2 \cdot 2}{2 - 3} + \frac{6}{(2 - 3)(2 - 4)} = -1 \quad \text{и} \quad \frac{2}{2 - 4} = -1.$$

Значит, второе уравнение имеет только один корень — число 2.

Так получилось потому, что, избавившись от дробей при решении второго уравнения, мы перешли от дробного уравнения к целому, у которого множество допустимых значений переменной шире. В результате

получилось целое уравнение, один из корней которого является *посторонним* для исходного дробного уравнения, и мы должны были этот корень отбросить.

При решении целого уравнения такая проблема не могла возникнуть. Избавляясь от дробей с числовыми знаменателями, мы переходим от одного целого уравнения к другому целому уравнению, ему равносильному. Множество допустимых значений переменных остаётся при этом одним и тем же — это множество всех действительных чисел.

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ДРОБНЫХ УРАВНЕНИЙ При решении дробных уравнений можно действовать так:

- найти общий знаменатель дробей, входящих в уравнение;
- умножить обе части уравнения на общий знаменатель;
- решить получившееся целое уравнение;
- проверить, нет ли среди найденных корней посторонних, и если они есть, то исключить их.

Пример 1. Решим уравнение $\frac{1}{x^2 - x} + 1 = \frac{3}{x}$.

Разложим на множители знаменатель первой дроби:

$$\frac{1}{x(x-1)} + 1 = \frac{3}{x}.$$

Общий знаменатель дробей — произведение $x(x-1)$. Умножив на него обе части уравнения, получим

$$\begin{aligned} 1 + x(x-1) &= 3(x-1), \\ x^2 - 4x + 4 &= 0, \\ (x-2)^2 &= 0, \quad x = 2. \end{aligned}$$

Найденный корень не является посторонним, так как он не обращает в нуль произведение $x(x-1)$ — общий знаменатель дробей: $2 \cdot (2-1) \neq 0$.

Ответ: 2.

РЕШЕНИЕ ДРОБНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ СЛУЧАЯХ Рассмотренный выше алгоритм можно использовать при решении любого дробного уравнения. В то же время, в некоторых случаях при переходе от дробного уравнения к целому можно рассуждать иначе.

Пример 2. Решим уравнение $\frac{x^2 - 2x - 15}{3x + 9} = 0$.

Это уравнение типа «дробь равна нулю». Вы знаете, что дробь равна нулю в том и только том случае, когда числитель равен нулю, а знаменатель отличен от нуля.

Приравняв числитель дроби к нулю, получим уравнение $x^2 - 2x - 15 = 0$. Его корни: $x_1 = -3$, $x_2 = 5$.

Проверим, нет ли постороннего корня. Для этого подставим каждое из чисел -3 и 5 в знаменатель $3x + 9$:

$$3 \cdot (-3) + 9 = 0, \quad 3 \cdot 5 + 9 \neq 0.$$

Таким образом, число -3 — посторонний корень.

Ответ: $x = 5$.

Задача. Какова область определения дроби $2 - \frac{6}{a-4}$?

Решение. Найдём значения a , при которых делители $a-4$ и $2 - \frac{6}{a-4}$ равны 0:

$$1) \quad a - 4 = 0, \quad a = 4;$$

$$2) \quad 2 - \frac{6}{a-4} = 0,$$

$$2a - 8 - 6 = 0,$$

$$a = 7.$$

Ответ:

$$(-\infty; 4) \cup (4; 7) \cup (7; +\infty).$$

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

1) Какие уравнения называют дробными?

2) Является ли наличие дроби в записи уравнения признаком того, что это уравнение дробное?

На примере уравнения

$$\frac{x^2}{x-4} - 1 = \frac{16}{x-4}$$

расскажите, как решают дробные уравнения. Запишите решение, выделив все основные шаги алгоритма.

1) Сформулируйте условие, при котором значение дроби равно 0.

2) Решите на основе условия равенства дроби нулю уравнение

$$\frac{2x^2 + x - 1}{2x - 1} = 0.$$

УПРАЖНЕНИЯ

ДЕЙСТВУЕМ ПО ОБЩЕМУ АЛГОРИТМУ

Решите уравнение (№ 250–253):

250

а) $\frac{4}{x} - \frac{7}{4x} = 6$;

в) $\frac{4}{15x} - \frac{1}{5} = \frac{2-x}{3x}$;

д) $\frac{y-1}{y} + \frac{2}{y^2} = 2$;

б) $\frac{5}{2y} + \frac{1}{2} = \frac{3}{y} + 1$;

г) $\frac{z-2}{z} = \frac{4}{3z} - \frac{z}{3}$;

е) $\frac{8}{t^2} - \frac{2-t}{t} = 2$.

251

а) $\frac{2}{y+1} - \frac{3}{2(y+1)} = 5$;

в) $\frac{3z-1}{4z+12} - \frac{z+2}{z+3} = \frac{1}{4}$;

д) $\frac{y+1}{y-1} = \frac{2}{y^2-y}$;

б) $\frac{1}{3(z-2)} = \frac{3}{z-2} + 1$;

г) $\frac{x+7}{3x-6} - \frac{2x-3}{x-2} = \frac{1}{3}$;

е) $1 + \frac{2}{x-1} = \frac{2}{x^2-x}$.

252

а) $z - \frac{1}{z} = \frac{16}{15}$;

в) $2y = 5 - \frac{3}{y}$;

д) $8 - \frac{1}{y} = 7y$;

б) $x + \frac{1}{x} = -\frac{5}{2}$;

г) $\frac{5}{x} + x = 6$;

е) $6 = \frac{5}{z} - z$.

253

а) $\frac{5}{x} = \frac{8}{x+1} + 1$;

в) $\frac{4}{y-2} - \frac{3}{y} = \frac{1}{2}$;

д) $\frac{y}{y-1} + \frac{6}{y+1} = 4$;

б) $\frac{1}{t-6} + 3 = \frac{10}{t}$;

г) $\frac{4}{x} + \frac{7}{2x+3} = 3$;

е) $\frac{8}{z-2} - 1 = \frac{8}{z+2}$.

254

Известно, что сумма некоторого числа и числа, ему обратного, равна 2,9. Найдите это число.

255

Известно, что если из данного числа вычесть число, ему обратное, то получится 0,45. Найдите данное число.

256

Найдите корни уравнения:

а) $\frac{x+9}{x+3} = x-1$; б) $x = \frac{2x}{3x-1}$; в) $\frac{2}{2x+5} = x+1$; г) $\frac{5x-2}{x} = 3x$.

257

Найдите значения переменных, при которых:

а) дробь $\frac{2a-1}{a+6}$ принимает значение, равное 5; -3; 0;

б) дробь $\frac{c^2+c-2}{c+6}$ принимает значение равное -10; 0; -1.

Решите уравнение (№ 258–261):

258

а) $\frac{x+2}{x+1} + \frac{x+3}{x-1} = \frac{4}{x^2-1}$;

в) $\frac{2x}{x+3} - \frac{x}{3-x} = \frac{9}{4x^2-36}$;

б) $\frac{4-x}{x+2} + \frac{x-1}{x-2} = \frac{x^2}{x^2-4}$;

г) $\frac{5}{x^2-4} + \frac{x}{2-x} = \frac{2x}{x+2}$.

259

а) $\frac{6}{x} + \frac{x+3}{x+2} = \frac{4x+6}{x^2+2x}$;

в) $\frac{x-1}{x} - \frac{1}{x-6} = \frac{6}{6x-x^2}$;

б) $\frac{6}{x-2} + \frac{2}{x} = \frac{x-3}{x^2-2x}$;

г) $\frac{4}{x} + \frac{3}{x-5} = \frac{x-20}{5x-x^2}$.

260

а) $\frac{3}{x-2} - \frac{6}{x+4} = \frac{3}{x}$;

в) $\frac{3}{4-x} - \frac{5}{x} = \frac{7}{3-x}$;

б) $\frac{4}{x-2} = \frac{7}{x-3} + \frac{2}{15}$;

г) $\frac{1}{x} - \frac{2}{x-1} = \frac{x+1}{x+2}$.

261

а) $\frac{x}{x-4} - \frac{x}{x-2} = \frac{4}{(x-4)(x-2)}$;

в) $\frac{2}{x-1} + \frac{5}{x+2} = \frac{13}{x^2+x-2}$;

б) $\frac{x+2}{x-5} - \frac{3x}{(x-2)(x-5)} = \frac{2}{x-2}$;

г) $\frac{2x}{x+1} + \frac{6}{x^2-3x-4} = \frac{x-1}{x-4}$.

ПРИМЕНЯЕМ ЧАСТНЫЕ ПРИЁМЫ РЕШЕНИЯ

262

а) Является ли какое-нибудь из чисел 1 и 2 корнем уравнения $\frac{(x-1)(x-2)}{3x^2-9x+6} = 0$?

б) Есть ли среди чисел -1, 1, -2 и 2 хотя бы один корень уравнения $\frac{(x+1)(x-1)(x+2)}{x^4-13x^2+36} = 0$?

263

Решите уравнение, опираясь на условие равенства дроби нулю:

а) $\frac{x^2-2x}{3x+6} = 0$;

в) $\frac{x^2+x}{x+1} = 0$;

д) $\frac{x^2-3x-18}{x+3} = 0$;

б) $\frac{x^2-1}{4x^2-x-3} = 0$;

г) $\frac{x^2-4x}{x+4} = 0$;

е) $\frac{x^2+5x+6}{x^2+8x+12} = 0$.

264

При каких значениях a значение данной дроби равно 0:

а) $\frac{3a^2}{a^2+3}$;

б) $\frac{9a^2}{a^2-a}$;

в) $\frac{4a^2+1}{a^2-1}$;

г) $\frac{a^2-3a}{a^2+a-12}$?

Неверно!

Учитель записал на доске четыре уравнения и предложил ученику поставить в соответствие каждому уравнению верное утверждение о числе его корней. Вот решение ученика:

$$\frac{x^2-1}{x-1} = 0$$

$$\frac{x-1}{x^2-1} = 0$$

$$\frac{x^2+1}{x^2+x} = 0$$

$$\frac{x^2+x}{x^2+1} = 0$$

↓
один корень

↓
два корня

↓
нет корней

Согласны ли вы с этим ответом?

265

Решите уравнение с использованием основного свойства пропорции:

а) $\frac{y-5}{y+5} = \frac{1}{3}$;

в) $\frac{3}{x-4} = \frac{4}{x-3}$;

д) $\frac{t}{2t-3} - \frac{3}{t} = 0$;

б) $\frac{15}{8-z} = \frac{1}{z}$;

г) $\frac{2-z}{3-z} = \frac{z}{z+4}$;

е) $\frac{2y-1}{y} - \frac{y+7}{y+3} = 0$.

Совет. Чтобы выяснить, не являются ли корни получившегося целого уравнения посторонними для исходного дробного уравнения, не обязательно выполнять подстановку этих чисел в знаменатели дробей. Можно найти корни знаменателей и сопоставить их с найденными числами.

266

Найдите корни уравнения:

а) $\frac{x^2-4}{(x^2-3x+2)(x^2-2x-3)} = 0$;

в) $\frac{x^2+2x+1}{(x^2+1)(x^2-1)} = 0$;

б) $\frac{x^2-7x+6}{x^3-2x^2+1} = 0$;

г) $\frac{2x^2-2}{(x^2-2x+2)^2} = 0$.

267

На рисунке 3.7 схематически изображены графики трёх функций, заданных формулами. Эти графики — гиперболы, штриховыми линиями показаны их асимптоты. В каждом случае определите координаты точек А, В и С.

а) $y = \frac{2x-1}{x-2}$;

б) $y = \frac{2x+6}{x-1}$;

в) $y = \frac{-0,5x+2}{x+2}$.

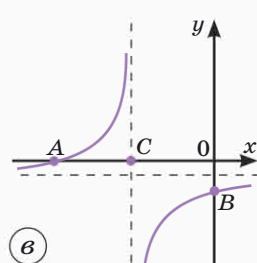
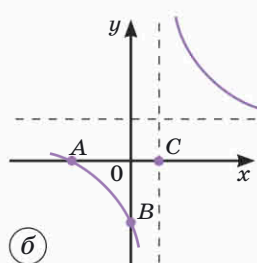
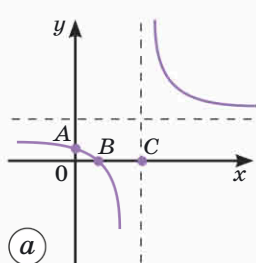


Рис. 3.7

3.5

ВЫ УЗНАЕТЕ:

О том, что уравнение, составленное по условию задачи, может оказаться дробным.

ВСПОМНИТЕ:

Как решают задачи алгебраическим способом?



ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

Прочитайте задачу:

«Лодка за 3 ч проплыла 30 км по течению реки и 5 км против её течения. Скорость течения реки 5 км/ч. Какова скорость лодки по течению реки?»

1) Пусть собственная скорость лодки x км/ч. Приходим к уравнению $\frac{30}{x+5} + \frac{5}{x-5} = 3$. Объясните, как оно составлено.

2) Корни составленного уравнения $x_1 = 10$, $x_2 = \frac{5}{3}$. Дайте ответ на вопрос задачи.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

Вы знаете, что для решения задачи алгебраическим способом надо прежде всего перевести условие на математический язык. В этом пункте новым является то, что уравнение, которое получается в результате такого перевода, оказывается дробным, и для решения задачи вам потребуются умения, приобретённые при изучении приёмов решения дробных уравнений.

СОСТАВЛЕНИЕ ДРОБНОГО УРАВНЕНИЯ ПО УСЛОВИЮ ЗАДАЧИ

Задача. Прогулочный катер «Ракета» спустился по течению реки на 60 км и после получасовой стоянки вернулся обратно. На всё путешествие он затратил 5 часов. Чему равна скорость течения реки, если в стоячей воде катер развивает скорость 27 км/ч?

Решение.

Пусть скорость течения реки x км/ч.

Тогда

$(27 + x)$ км/ч — скорость катера по течению;

$(27 - x)$ км/ч — скорость катера против течения;

$\frac{60}{27 + x}$ ч — время, затраченное на путь по течению;

$\frac{60}{27 - x}$ ч — время, затраченное на путь против течения.

Так как стоянка заняла $\frac{1}{2}$ ч, то чистое время движения составило $4\frac{1}{2}$ ч.

Получаем дробное уравнение

$$\frac{60}{27 + x} + \frac{60}{27 - x} = \frac{9}{2}.$$

Теперь это уравнение надо решить. Прежде всего упростим его, разделив обе его части на 3, а затем воспользуемся известным алгоритмом решения дробного уравнения:

$$\frac{20}{27 + x} + \frac{20}{27 - x} = \frac{3}{2};$$

$$40(27 - x) + 40(27 + x) = 3(27^2 - x^2);$$

$$40 \cdot 27 - 40x + 40 \cdot 27 + 40x = 3 \cdot 27^2 - 3x^2;$$

$$3x^2 = 3 \cdot 27^2 - 80 \cdot 27;$$

$$x^2 = 27^2 - 80 \cdot 9;$$

$$x^2 = 9; x_1 = 3, x_2 = -3.$$

Каждое из чисел -3 и 3 является корнем составленного по условию задачи дробного уравнения. Однако скорость течения реки не может быть отрицательной, поэтому ответ у задачи только один.

Ответ: скорость течения реки равна 3 км/ч.

УПРАЖНЕНИЯ

СОСТАВЛЯЕМ РАЗНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПО УСЛОВИЮ ЗАДАЧИ

- 268** Андрей проехал на велосипеде 24 км. На автомобиле за это же время при скорости, на 30 км/ч большей, он проехал бы 84 км. С какой скоростью ехал Андрей на велосипеде? За какое время он проехал это расстояние?
- 269** Для класса купили несколько пачек тетрадей и столько же пачек блокнотов. Тетрадей в пачке на 6 больше, чем блокнотов. Всего купили 120 тетрадей и 90 блокнотов. Сколько тетрадей в пачке? Сколько пачек тетрадей купили?
- 270** Премияльный фонд в 72 000 р. распределили в конце года между сотрудниками отдела поровну. В течение года 6 человек уволились, поэтому каждый из сотрудников получил на 1000 р. больше, чем предполагалось. Сколько сотрудников было в отделе первоначально? Сколько сотрудников стало к концу года?
- 271** *Старинная задача.* Несколько человек обедали вместе и по счёту должны были уплатить 175 шиллингов. Оказалось, что у двоих не было при себе денег. Поэтому каждому из остальных пришлось уплатить на 10 шиллингов больше, чем приходилось на его долю. Сколько человек обедало? Сколько денег пришлось уплатить каждому?

ОТВЕЧАЕМ НА ВОПРОС ЗАДАЧИ, СОСТАВИВ И РЕШИВ УРАВНЕНИЕ

- 272** Лодка проплыла 18 км по течению реки и за такое же время 10 км против течения реки. Скорость течения реки 2 км/ч. Найдите собственную скорость лодки и время движения лодки вниз по реке.
- 273** Велосипедист проехал 7 км по шоссе и 5 км по просёлочной дороге, затратив на весь путь 1 ч. По просёлку он ехал со скоростью, на 4 км/ч меньшей, чем по шоссе. С какой скоростью велосипедист ехал по шоссе? Что ещё можно узнать, используя полученные данные? Сделайте это.
- 274** Катер спустился по течению реки, пройдя 28 км, и тотчас вернулся назад, затратив на весь путь 7 ч. Скорость течения реки 3 км/ч. Какова скорость катера в стоячей воде? Что ещё можно узнать, используя полученные данные?
- 275** Прогулочный маршрут на лодках включает движение по течению реки на расстояние 10 км и против течения реки на расстояние 6 км. Скорость течения реки 1 км/ч. Какой должна быть собственная скорость лодки, чтобы поездка заняла 2 ч, включая 15-минутную стоянку?
- 276** Чтобы проехать 36 км по просёлочной дороге и 9 км по шоссе, велосипедисту потребуется на 1 ч больше, чем если бы он ехал всё это расстояние по шоссе. Скорость велосипедиста при движении по шоссе на 6 км/ч больше его скорости на просёлочной дороге. Найдите скорость велосипедиста на шоссе.
- 277** Из города A в город B , расстояние между которыми 140 км, выехал поезд. В середине пути он был задержан на 24 мин, но, увеличив скорость на 20 км/ч, прибыл в город B без опоздания. Найдите первоначальную скорость поезда.

3.6

ВЫ УЗНАЕТЕ:

В чём состоит графический способ решения систем уравнений с двумя переменными.

Чем отличаются решения системы уравнений, найденные графическим способом, от решений, полученных алгебраическим способом.

ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Рассматривая уравнения с двумя переменными и их системы, мы кроме алгебраического языка используем и геометрический. В его основе — *графики уравнений*.

ГРАФИКИ НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

На рисунке 3.8 изображены графики нескольких уравнений с двумя переменными.

График уравнения $x^2 - \frac{1}{2}y = 2$ — парабола. Действительно, выразив переменную y через переменную x , получим уравнение знакомого вида $y = 2x^2 - 4$. Графиком уравнения $xy = -6$ (т.е. уравнения $y = -\frac{6}{x}$) служит гипербола. Графиком уравнения $x^2 + y^2 = 16$ является окружность с центром в начале координат и радиусом, равным 4. Графики линейных уравнений $x + 2y = 4$ и $2y - 5 = 0$ — прямые. А графиком уравнения $y^2 - 4x^2 = 0$ является объединение двух прямых $y = 2x$ и $y = -2x$. В самом деле, разложив левую часть уравнения на множители, получим $(y - 2x)(y + 2x) = 0$. Отсюда ясно, что уравнение распадается на два линейных уравнения: $y - 2x = 0$ и $y + 2x = 0$. Из первого получаем $y = 2x$, а из второго — $y = -2x$.

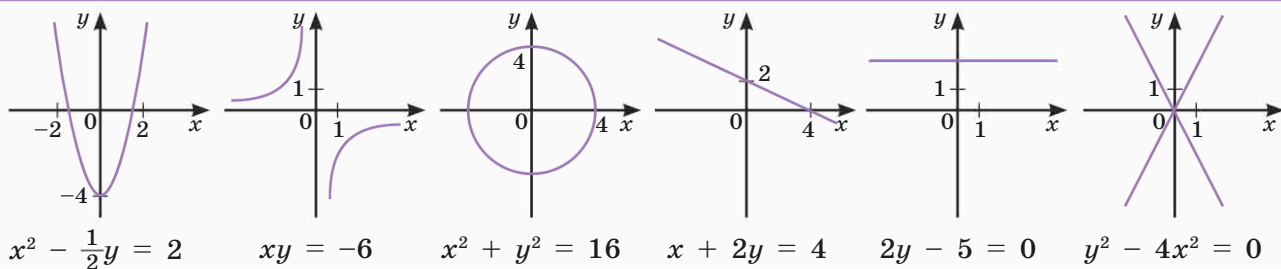


Рис. 3.8

КАК РЕШАЮТ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

ГРАФИЧЕСКИМ СПОСОБОМ

Чтобы решить систему двух уравнений с двумя переменными графическим способом, нужно:

- построить в одной системе координат графики уравнений, входящих в систему;
- найти общие точки графиков и «считать» по рисунку их координаты.



Каждая общая точка графиков даёт пару чисел — решение системы. Сколько у графиков общих точек — столько решений имеет система.

Вам уже приходилось использовать графики при работе с системами линейных уравнений с двумя переменными, в частности, для исследования вопроса о том, сколько решений может иметь такая система. Теперь мы сосредоточимся на системах, содержащих хотя бы одно уравнение, не являющееся линейным.

Пример 1. Решим графически систему

$$\begin{cases} x^2 - y = 2, \\ x + y = 0. \end{cases}$$

Посмотрите на рисунок 3.9. Парабола и прямая — графики уравнений $x^2 - y = 2$ и $x + y = 0$ — пересекаются в двух точках, значит, система имеет два решения. По рисунку можно прочесть координаты точек пересечения: $A(-2; 2)$, $B(1; -1)$. Пары чисел $(-2; 2)$ и $(1; -1)$ — решения системы. Эти решения являются точными. В самом деле:

$(-2)^2 - 2 = 2$ и $-2 + 2 = 0$ — верные равенства;
 $1^2 - (-1) = 2$ и $1 - 1 = 0$ — верные равенства.

Однако, как правило, графический способ (в отличие от алгебраического) позволяет находить решения лишь приближённо.

Пример 2. Решим графически систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ xy = 4. \end{cases}$$

График первого уравнения — окружность с центром в начале координат и радиусом, равным 3. График второго уравнения — гипербола; её ветви расположены в I и III координатных четвертях.

Построим окружность и гиперболу в одной системе координат (рис. 3.10). Мы видим, что графики пересекаются в четырёх точках — A , B , C и D . Следовательно, данная система имеет четыре решения.

С помощью рисунка можно приближённо определить координаты точек пересечения графиков, т.е. найти четыре пары чисел, являющихся приближёнными решениями системы. Получим

$$\begin{cases} x_1 \approx 2,6, \\ y_1 \approx 1,6. \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 \approx 1,6, \\ y_2 \approx 2,6. \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 \approx -2,6, \\ y_3 \approx -1,6. \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 \approx -1,6, \\ y_4 \approx -2,6. \end{cases}$$



Симметрия найденных решений является следствием геометрической симметрии. Точки A и C , а также точки B и D симметричны относительно начала координат, и поэтому их координаты — противоположные числа. Точки A и B , как и точки C и D , симметричны относительно прямой, образованной биссектрисами I и III координатных четвертей, поэтому их координаты «меняются местами».

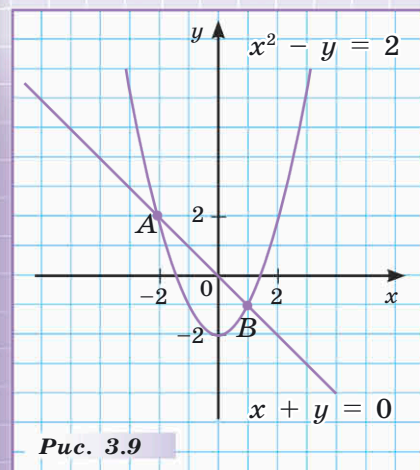


Рис. 3.9

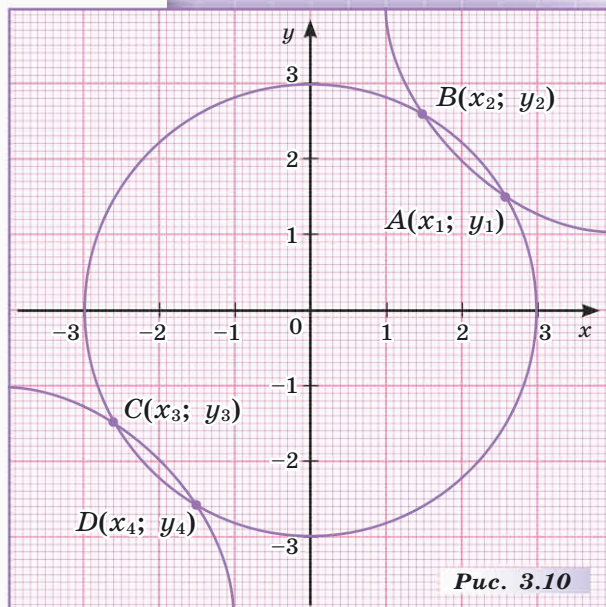


Рис. 3.10

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

● Дайте алгебраическое толкование утверждений:

- 1) графики уравнений системы пересекаются в двух точках;
- 2) графики уравнений системы пересекаются в точке с координатами $(a; b)$.

● В чём состоит графический способ решения системы уравнений с двумя переменными? Проиллюстрируйте свой ответ на примере системы

$$\begin{cases} x^2 - y = 0, \\ x - y + 2 = 0. \end{cases}$$

УПРАЖНЕНИЯ

СТРОИМ ГРАФИКИ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

278

Найдите в данном перечне уравнения парабол, гипербол, окружностей, прямых и постройте графики этих уравнений в указанном порядке:

- 1) $x^2 - \frac{1}{3}y = 2$; 3) $xy = -4$; 5) $y + 2x = 6$; 7) $4 - 2xy = 0$;
 2) $x^2 + y^2 = 25$; 4) $x^2 - x - y = 0$; 6) $3y - 6 = 0$; 8) $x^2 + y^2 - 9 = 0$.

279

Постройте график уравнения, затем назовите четыре решения этого уравнения и покажите положение соответствующих точек на графике:

- а) $(x - 2)(y - 3) = 0$; б) $x(y + 2) = 0$; в) $(y - x)(2y + x) = 0$.

280

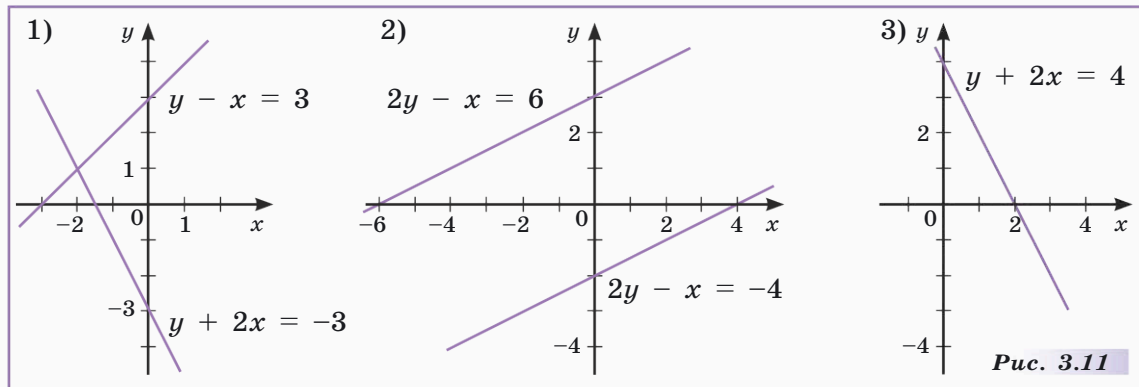
Составьте уравнение с двумя переменными, график которого — объединение:

- а) параболы $y = x^2$ и прямой $y = -2$; б) пары прямых $y = x + 1$ и $y = x - 1$.

ИСПОЛЬЗУЕМ ГРАФИКИ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

281

Вы знаете, что система двух линейных уравнений с двумя переменными может иметь одно решение, не иметь решений, иметь бесконечно много решений. Пользуясь рисунком 3.11, запишите систему, соответствующую каждому из этих случаев. Решите алгебраически систему, имеющую одно решение.



282

Каково взаимное положение в координатной плоскости графиков уравнений системы? Имеет ли система решения и если имеет, то сколько?

- а) $\begin{cases} y - 3x = 0, \\ 3y - x = 6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + 2y = 3, \\ y = -0,5x; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x = 3 - 2y, \\ 2x = 6 - 4y; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2y - x = 5, \\ 4y + 2x = 10. \end{cases}$

283

Подберите какое-нибудь линейное уравнение с двумя переменными, которое вместе с уравнением $3x + 2y = 4$ составило бы систему: 1) имеющую одно решение; 2) имеющую бесконечно много решений; 3) не имеющую решений.

284

Укажите какое-нибудь значение коэффициента k , при котором система

$$\begin{cases} 2x + y = 7, \\ kx + y = 3 \end{cases}$$

имеет единственное решение. Существует ли такое значение k , при котором эта система не имеет решений? имеет бесконечно много решений?

РЕШАЕМ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ГРАФИЧЕСКИ

285

Решите систему уравнений графически, пользуясь рисунком 3.12. Проверьте свой ответ, выполнив подстановку:

а) $\begin{cases} x^2 - y = 8, \\ y + x = -2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} xy = 12, \\ y + 6 = 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 20, \\ x + y = 6. \end{cases}$

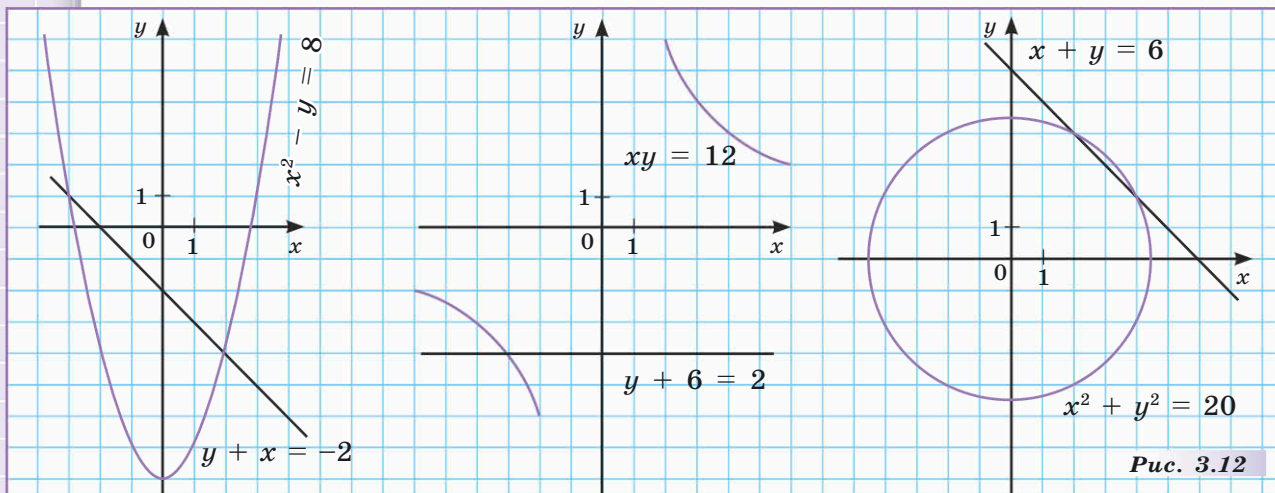


Рис. 3.12

286

Пользуясь рисунком 3.13, составьте систему уравнений:

1) имеющую два решения; 2) имеющую одно решение; 3) не имеющую решений.

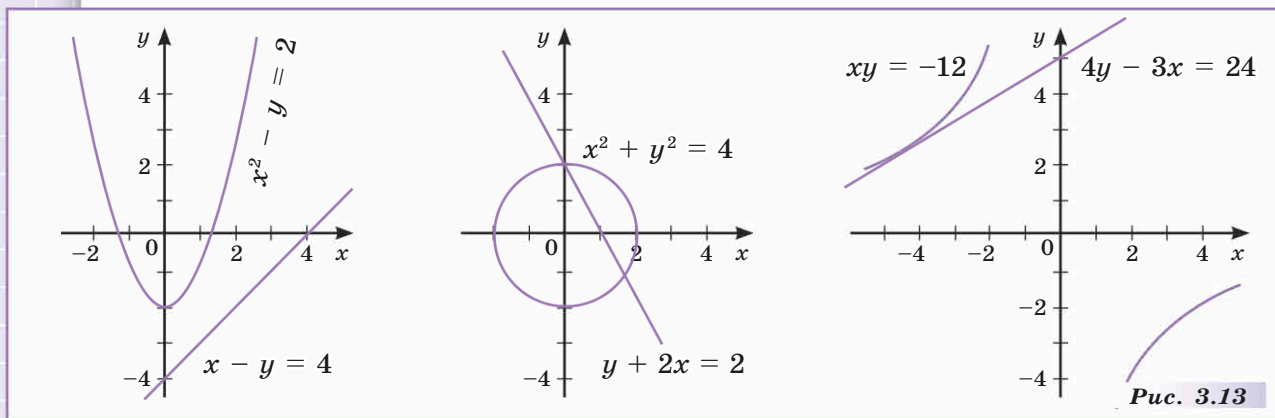


Рис. 3.13

287

Решите графически систему уравнений:

а) $\begin{cases} x - y = 0, \\ xy = 4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y + x^2 = 4, \\ y - x = 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x - y = 0, \\ y = 4x - x^2. \end{cases}$

288

С помощью схематических графиков выясните, имеет ли система уравнений решения, и если имеет, то сколько:

а) $\begin{cases} xy = 8, \\ y - x^3 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} xy = -1, \\ x^3 - y = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} y = \sqrt{x}, \\ x - 2y = 2; \end{cases}$

г) $\begin{cases} y = x^2 + 8, \\ y = -x^2 + 12. \end{cases}$

289

Решите графически систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ y + 6 = x^2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y - 1 = x^2 - 2x; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ x^2 - y = 3. \end{cases}$

3.7

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Приём решения системы двух уравнений с двумя переменными, в которой одно из уравнений линейное.
- Приёмы решения некоторых систем, не содержащих линейное уравнение.

ВСПОМНИТЕ:

- Как определяют степень уравнения с одной переменной?

АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

До сих пор вы в основном имели дело с системами двух линейных уравнений с двумя переменными. В этом пункте будут рассмотрены примеры решения более сложных систем, в которых только одно из уравнений линейное или же линейных уравнений вообще нет.

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ДВУХ УРАВНЕНИЙ, ИЗ КОТОРЫХ ТОЛЬКО ОДНО ЛИНЕЙНОЕ

При решении линейных систем вы могли воспользоваться любым из известных вам алгебраических приёмов — способом сложения или способом подстановки. Один из этих приёмов — способ подстановки — применим также и в том случае, когда в системе одно из уравнений линейное, а другое нет. При этом действуют по следующему алгоритму:

- выражают из линейного уравнения одну переменную через другую;
- подставляют полученное выражение в другое уравнение системы; в результате приходят к уравнению с одной переменной;
- решают уравнение с одной переменной;
- находят соответствующие значения второй переменной.

Пример 1. Решим систему уравнений $\begin{cases} 2x + y = 1, \\ x^2 + xy = -6. \end{cases}$

- $\begin{cases} y = 1 - 2x, \\ x^2 + xy = -6 \end{cases}$ — из линейного уравнения $2x + y = 1$ выразили y ;
- $x^2 + x(1 - 2x) = -6$ — подставили во второе уравнение вместо y выражение $1 - 2x$;
- $x^2 - x - 6 = 0$
 $x_1 = -2, x_2 = 3$ — выполнили преобразования, получили квадратное уравнение и нашли его корни;
- $y_1 = 1 - 2 \cdot (-2) = 5$
 $y_2 = 1 - 2 \cdot 3 = -5$ — по формуле $y = 1 - 2x$ вычислили соответствующие значения y .

Ответ: система имеет два решения: $(-2; 5)$ и $(3; -5)$.

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ Степень целого уравнения с двумя переменными определяется так же, как и степень целого уравнения с одной переменной.



Если левая часть уравнения с двумя переменными — многочлен, не содержащий подобных членов, а правая часть — число 0, то степень уравнения считают равной степени этого многочлена.

Хорошо знакомые вам линейные уравнения, т.е. уравнения вида $ax + by = c$, в которых хотя бы один из коэффициентов при переменных x и y отличен от

нуля, являются *уравнениями первой степени*. Это, например, уравнения $x - y = 1$, $\frac{x}{3} - \frac{y}{4} - 12 = 0$.

Вы имели дело и с *уравнениями с двумя переменными второй степени*, с такими, например, как $x^2 + y^2 = 10$, $xy = -6$, $y^2 - 4x^2 = 0$, $x^2 - 0,5y = 2$. В общем виде уравнение с двумя переменными второй степени записывают так:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

где хотя бы один из коэффициентов a , b и c отличен от нуля. (В противном случае многочлен в левой части уравнения не будет содержать членов второй степени.)

Система, рассмотренная в примере 1, содержит одно уравнение первой степени и одно уравнение второй степени. Такие системы всегда можно решить способом подстановки.

Что касается решения систем двух уравнений с двумя переменными, каждое из которых второй степени, то это, вообще говоря, задача трудная. Но в некоторых частных случаях удаётся найти простые приёмы.

Пример 2. Решим систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ xy = -3. \end{cases}$

Есть разные способы решения этой системы (с двумя из них, красивыми и практически не требующими письменных вычислений, вы можете познакомиться в рубрике «Узнайте больше» на с. 118). Но здесь мы прибегнем к знакомому способу подстановки, которым в данном случае воспользоваться можно:

- 1) $\begin{cases} y = -\frac{3}{x}, \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$ — из уравнения $xy = -3$ выразили y ;
- 2) $x^2 + \left(-\frac{3}{x}\right)^2 = 10$ — подставили во второе уравнение вместо y выражение $-\frac{3}{x}$;
- 3) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ — выполнили преобразования, пришли к биквадратному уравнению и решили его;
 $x_1 = 3, x_2 = -3,$
 $x_3 = 1, x_4 = -1$
- 4) $y_1 = -1, y_2 = 1,$ — по формуле $y = -\frac{3}{x}$ нашли
 $y_3 = -3, y_4 = 3$ соответствующие значения y .

Ответ: система имеет четыре решения:

$$\begin{cases} x_1 = 3, \\ y_1 = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -3, \\ y_2 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = 1, \\ y_3 = -3; \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = -1, \\ y_4 = 3. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ С ПОМОЩЬЮ ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННЫХ

Иногда систему с помощью подходящей замены удаётся свести к более простой. Так, например, рассмотренная ниже система, содержащая дробные уравнения, с помощью удачной замены свелась к решению системы линейных уравнений.



Степенью многочлена, в котором нет подобных членов, называют наибольшую степень входящих в него одночленов.

Степенью одночлена, отличного от числа, называют сумму показателей степеней всех входящих в него переменных.

Например:

степень одночлена
 $5a^2bc^3$

равна 6;

степень многочлена
 $2a^3b + a^2b - 3ab + 1$
 равна 4.



Задача. Известно, что скорость лодки по течению реки равна a км/ч, а против течения — b км/ч. Требуется:

1) найти собственную скорость лодки и скорость течения реки;

2) решить задачу для $a = 21$, $b = 18$.

Решение.

1) Пусть собственная скорость лодки v км/ч, а скорость течения u км/ч.

Составим систему

$$\begin{cases} v + u = a, \\ v - u = b. \end{cases}$$

Способом сложения получим

$$\begin{aligned} 2v &= a + b, \text{ т.е. } v = \frac{a+b}{2}; \\ 2u &= a - b, \text{ т.е. } u = \frac{a-b}{2}. \end{aligned}$$

(Дайте словесную формулировку результата.)

2) Если $a = 21$ и $b = 18$, то

$$\begin{aligned} v &= \frac{21+18}{2} = 19,5 \text{ (км/ч)}, \\ u &= \frac{21-18}{2} = 1,5 \text{ (км/ч)}. \end{aligned}$$

Пример 3. Решим систему уравнений
$$\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 4, \\ \frac{1}{x} - \frac{3}{y} = 9. \end{cases}$$

1) $\frac{1}{x} = a, \frac{1}{y} = b$ – ввели новые переменные a и b ;

2) $\begin{cases} 2a + b = 4, \\ a - 3b = 9 \end{cases}$ – записали линейную систему;

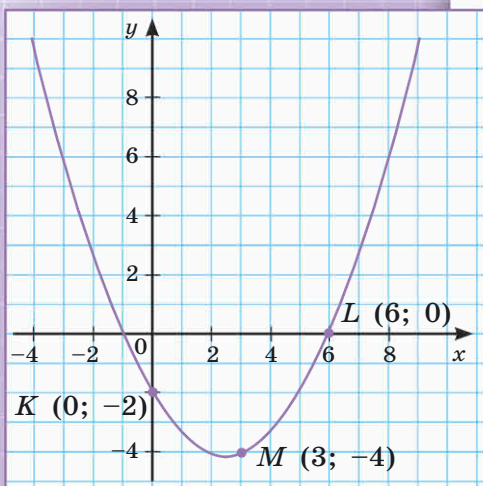
3) $a = 3, b = -2$ – решили линейную систему;

4) $\frac{1}{x} = 3, x = \frac{1}{3}$ – вернулись к переменным x и y .

$$\frac{1}{y} = -2, y = -\frac{1}{2}.$$

Ответ: $(\frac{1}{3}; -\frac{1}{2})$.

Рис. 3.14



ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

1) Как решают систему двух уравнений с двумя переменными способом подстановки? Продемонстрируйте этот приём на примере системы

$$\begin{cases} y - 2x = 2, \\ y - 5x^2 = -1. \end{cases}$$

2) Каков общий вид уравнения с двумя переменными первой степени? второй степени? Какое требование накладывается на коэффициенты при переменных?

3) Приведите примеры таких уравнений.

4) Придумайте пример уравнения с двумя переменными третьей степени.

ЗАДАЧИ НА КООРДИНАТНОЙ ПЛОСКОСТИ Вам уже приходилось прибегать к системам уравнений для решения задач на координатной плоскости: для нахождения координат точек пересечения параболы и прямой, для составления уравнения прямой, у которой известны координаты двух точек, и т.д. Рассмотрим ещё одну задачу такого рода.

Пример 4. На рисунке 3.14 изображена парабола, которая проходит через точки $K(0; -2)$, $L(6; 0)$ и $M(3; -4)$. Зададим эту параболу уравнением.

Уравнение этой параболы имеет вид $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$. И задача сводится к тому, чтобы найти коэффициенты a , b и c .

Координаты точек K , L и M должны удовлетворять уравнению параболы. Подставив последовательно эти координаты в уравнение $y = ax^2 + bx + c$, получим систему трёх уравнений с переменными a , b и c :

$$\begin{cases} -2 = a \cdot 0 + b \cdot 0 + c, \\ 0 = a \cdot 6^2 + b \cdot 6 + c, \\ -4 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c, \text{ т.е.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = -2, \\ 36a + 6b + c = 0, \\ 9a + 3b + c = -4. \end{cases}$$

Решим эту систему. Значение c нам уже известно. Подставив во второе и третье уравнения системы вместо c число -2 , получим систему двух уравнений с двумя переменными a и b :

$$\begin{cases} 36a + 6b = 2, \\ 9a + 3b = -2. \end{cases}$$

Из этой системы найдём, что $a = \frac{1}{3}$ и $b = -\frac{5}{3}$. Таким образом, парабола задаётся уравнением

$$y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{3}x - 2.$$

УПРАЖНЕНИЯ

РЕШАЕМ ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

290

Решите систему уравнений двумя способами — сначала способом подстановки, затем способом сложения:

$$\text{а) } \begin{cases} x + 3y = 8, \\ 2x - y = -5; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 3m - 4n = 20, \\ m + 2n = 0; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} 2x + 5y = 6, \\ 3x + 7y = 4. \end{cases}$$

Какой способ в каждом конкретном случае вам показался предпочтительнее?

291

Решите систему уравнений, воспользовавшись любым способом по своему выбору:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{x+z}{2} = 1, \\ x - z = 3; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{y}{3} - \frac{z}{2} = \frac{1}{2}, \\ 2y + 3z = 1; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y = -2, \\ 3x - y = -5; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} \frac{1}{5}m - \frac{1}{6}n = 0, \\ 5m - 4n = 2. \end{cases}$$

Совет. Сначала избавьтесь от дробей в первом уравнении системы.

292

Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} 3(x - y) - 2(x + y) = 2x - 2y, \\ \frac{x+y}{5} - \frac{x-y}{3} = 1 - \frac{y}{15}; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 5(x + y) - 4(x - y) = 8y - 3x, \\ \frac{x-y}{2} - \frac{x+y}{6} = 3. \end{cases}$$

РЕШАЕМ НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

293

Решите систему уравнений способом подстановки:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \begin{cases} x + y = 12, \\ xy = 35; \end{cases} & \text{в) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ x - y = 1; \end{cases} & \text{д) } \begin{cases} x^2 - y^2 = 64, \\ 3x + 5y = 0; \end{cases} \\ \text{б) } \begin{cases} x + y = -11, \\ xy = -12; \end{cases} & \text{г) } \begin{cases} x^2 + y^2 = 101, \\ x + y = 11; \end{cases} & \text{е) } \begin{cases} x^2 - xy = 10, \\ 3x + y = 3. \end{cases} \end{array}$$

294

Решите систему уравнений (выберите удобный способ):

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \begin{cases} x^2 + y = 0, \\ 3x - y = 10; \end{cases} & \text{в) } \begin{cases} 3x - z = 3, \\ 2x^2 - z = 3; \end{cases} & \text{д) } \begin{cases} 3x^2 + 2x = 3y, \\ 2x + 5 = y; \end{cases} \\ \text{б) } \begin{cases} u + v^2 = -3, \\ u - 5v = -3; \end{cases} & \text{г) } \begin{cases} 3z + y = 6, \\ 2z^2 - 3y = -7; \end{cases} & \text{е) } \begin{cases} 2y = x^2 - 4x, \\ 4y = 3x - 9. \end{cases} \end{array}$$

295

1) Разберите способ решения системы уравнений $\begin{cases} x^2 - y^2 = 8, \\ x - y = -2. \end{cases}$

Разложим в первом уравнении разность $x^2 - y^2$ на множители, затем подставим вместо $x - y$ число -2 . Получим систему, которую легко решить устно:

$$\begin{cases} (x - y)(x + y) = 8, \\ x - y = -2; \end{cases} \quad \begin{cases} -2(x + y) = 8, \\ x - y = -2; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = -4, \\ x - y = -2. \end{cases}$$

Ответ: $x = -3$, $y = -1$.

2) Решите систему уравнений: а) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 21, \\ x + y = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - xy = 4, \\ x - y = 1. \end{cases}$

296

С помощью схематических рисунков определите, графики какой пары функций пересекаются:

$$1) y = -\frac{6}{x} \text{ и } y = 2x \quad \text{или} \quad 2) y = \frac{6}{x} \text{ и } y = 2x - 4.$$

Вычислите координаты точек пересечения.

297

Вычислите координаты общих точек параболы и прямой:

а) $y = x^2 - 5x$ и $y = x - 8$; б) $y = 2x - 6$ и $y = x^2 - 5$.

В каждом случае проиллюстрируйте ответ схематическим рисунком.

Решите систему уравнений способом подстановки (№ 298–299):

298

а) $\begin{cases} y + 2x = 0, \\ 2x^2 + y^2 - 6y = 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x - y = 3, \\ x^2 - xy - 2y^2 = 7; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 10y^2 - 4x = x^2 - 8y, \\ 3y - x = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} y + 2x = 1, \\ x^2 + xy + y^2 = 7. \end{cases}$

299

а) $\begin{cases} xy = -4, \\ x^2 + y^2 = 8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 29, \\ xy = -10; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x^2 - y^2 = 14, \\ xy = 6. \end{cases}$

300

Решите систему уравнений, воспользовавшись способом сложения:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x^2 - y^2 = 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} xy - y = 1, \\ xy + x = 4; \end{cases}$ в) $\begin{cases} xy + x^2 = 1, \\ xy - x^2 = \frac{1}{2}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x + y + xy = -6, \\ x + y - xy = 10. \end{cases}$

301

1) Разберите приём решения системы уравнений $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}, \\ x + y = 9; \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{x+y}{xy} = \frac{1}{2}, \\ x + y = 9 \end{cases}$ – сложили дроби $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{y}$;

$\begin{cases} \frac{9}{xy} = \frac{1}{2}, \\ x + y = 9 \end{cases}$ – подставили в первое уравнение значение суммы $x + y$;

$\begin{cases} xy = 18, \\ x + y = 9 \end{cases}$ – из первого уравнения нашли произведение xy .

Теперь можно воспользоваться способом подстановки. Закончите решение.

2) Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{3}, \\ x + y = 8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - y = 20, \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{4}{15}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}, \\ xy = -2. \end{cases}$

ИСПОЛЬЗУЕМ ЗАМЕНУ ПЕРЕМЕННЫХ

302

Решите систему уравнений, подобрав замену, приводящую данную систему к линейной:

а) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4}, \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = -\frac{3}{4}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{4}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{15}, \\ \frac{2}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{3}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \frac{8}{x+y} + \frac{4}{x-y} = 3, \\ \frac{1}{x+y} - \frac{2}{x-y} = 1. \end{cases}$

303

Решите систему уравнений, используя замену $x + y = a$, $x - y = b$:

а) $\begin{cases} x + y = 4(x - y), \\ x^2 - y^2 = 16; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3(x - y) = x + y, \\ \frac{x^2 - y^2}{3} = 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x - 2y = x + y, \\ x^2 - y^2 = 8; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 10, \\ 2(x + y) = 5(x - y). \end{cases}$

РЕШАЕМ ЗАДАЧИ НА КООРДИНАТНОЙ ПЛОСКОСТИ

304

- 1) Постройте в одной системе координат прямую, которую образуют биссектрисы I и III координатных четвертей, и окружность с центром в начале координат и с радиусом, равным 3. Найдите по рисунку приближённо координаты точек их пересечения.
- 2) Вычислите точные координаты точек пересечения, составив и решив систему уравнений.
- 3) Укажите точные и приближённые координаты точек пересечения этой же окружности с прямой, образованной биссектрисами II и IV координатных четвертей.

305

- Прямая, угловым коэффициент которой равен 0,5, проходит через точку $P(10; 2)$.
- 1) Запишите уравнение прямой.
 - 2) Найдите координаты точек её пересечения с осью x и с осью y .
 - 3) Постройте эту прямую в координатной плоскости.

306

На рисунке 3.15 указаны координаты двух точек прямой MN .

- 1) Запишите уравнение этой прямой, составив и решив систему уравнений.
- 2) Найдите координаты точек пересечения прямой с осью x и с осью y .

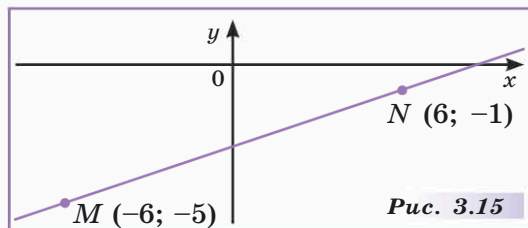


Рис. 3.15

307

Парабола $y = ax^2 + bx + c$ проходит через точки $M(0; 1)$, $N(1; 0)$ и $K(3; 10)$. Задайте эту параболу уравнением и постройте её.

308

Составьте уравнение параболы (рис. 3.16, а, б) и вычислите координаты точек её пересечения с осью x .

309

- Парабола $y = ax^2 + bx + c$ проходит через точки $A(0; 3)$, $B(-1; 0)$ и $C(1; 4)$.
- 1) Определите, проходит ли эта парабола через точку $M(4; -5)$; через точку $N(-4; -5)$.
 - 2) Найдите координаты её вершины.

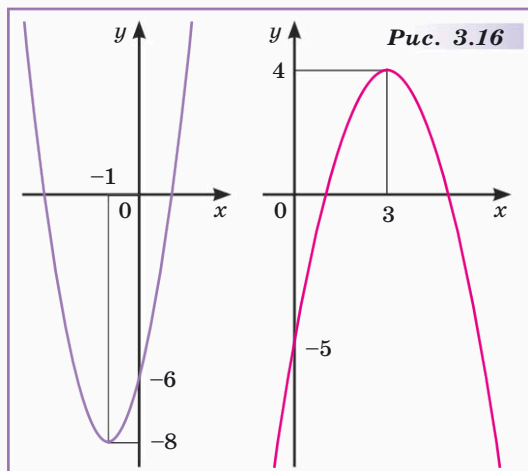


Рис. 3.16

310

ЗАДАЧА-ИССЛЕДОВАНИЕ

- 1) Система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y = x^2 + b, \end{cases}$ где b — произвольное число, может иметь одно, два, три или четыре решения, а также может не иметь решений. Проиллюстрируйте каждый случай с помощью схематического рисунка и подберите для него конкретную систему.
- 2) Сколько решений может иметь указанная система, если известно, что:
 - а) b — произвольное положительное число;
 - б) b — произвольное отрицательное число?

3.8

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- О том, что при переводе задачи на математический язык может получиться система, содержащая уравнение второй степени.
- Некоторые сюжеты таких задач.

Задачи на составление и решение систем уравнений встречаются в математических текстах уже во II тысячелетии до н.э. Известным научным трудом, который изучали в течение многих столетий, был написанный во II в. до н.э. трактат китайских учёных «Математика в девяти книгах». Он предназначался тем, кому на практике были нужны математические знания: землемерам, строителям, торговцам. В VII и VIII книгах этого трактата рассматриваются системы уравнений и даются краткие правила их решений; всё изложение ведётся в словесной форме.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Разберите решение задачи 1 и ответьте на вопросы:
 - какие величины обозначены буквами x и y ;
 - как получено уравнение $x + y = 50$;
 - почему составленная система имеет два решения, а ответ задачи только один?
- Объясните, как составлена система уравнений по условию задачи 2.
- Существуют ли два числа, таких, что:
 - их сумма равна 10, а произведение равно -24 ;
 - их разность равна 2, а произведение равно -47 ?

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

При переводе условия задачи на математический язык может получиться система уравнений, содержащая не только линейные уравнения. С приёмами решения подобных систем вы уже знакомы.

СОСТАВЛЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ПО УСЛОВИЮ ЗАДАЧИ

Задача 1. Участок земли прямоугольной формы площадью 6 соток огорожен забором, длина которого 100 м. Найдите длины сторон этого участка.

Решение. Пусть одна сторона участка равна x м, а другая — y м. Так как площадь участка равна 600 м^2 , то $xy = 600$. Периметр участка равен 100 м, поэтому $x + y = 50$. Имеем систему уравнений $\begin{cases} xy = 600, \\ x + y = 50. \end{cases}$

Из второго уравнения системы получим $y = 50 - x$. Подставив выражение для y в первое уравнение, придём к уравнению с одной переменной:

$$x(50 - x) = 600, \text{ т.е. } x^2 - 50x + 600 = 0.$$

Решив это уравнение, найдём: $x_1 = 30$, $x_2 = 20$.

Соответствующие значения y найдём по формуле $y = 50 - x$: $y_1 = 20$, $y_2 = 30$.

Таким образом, система имеет два решения: $x_1 = 30$, $y_1 = 20$; $x_2 = 20$, $y_2 = 30$. Однако найденные значения x и y задают равные прямоугольники. Поэтому ответ у задачи только один: стороны участка равны 30 м и 20 м.

Ответ: 30 м и 20 м.

Задача 2. Начертите план участка прямоугольной формы, в котором отрезок AB — это дорожка, идущая по диагонали участка (рис. 3.17, а). Длина дорожки 13 м, а периметр участка равен 34 м.

Решение. Чтобы начертить план, надо знать длины сторон участка. Обозначим длины (в метрах) соответственно буквами x и y . Тогда числа x и y должны удовлетворять системе уравнений $\begin{cases} x + y = 17, \\ x^2 + y^2 = 13^2. \end{cases}$

Подставив во второе уравнение системы вместо y выражение $17 - x$, получим квадратное уравнение

$$x^2 + (17 - x)^2 = 169.$$

Его корни: $x_1 = 5$, $x_2 = 12$.

Соответствующие значения y : $y_1 = 12$, $y_2 = 5$.

Таким образом, система имеет два решения:

$$x_1 = 5, y_1 = 12; x_2 = 12, y_2 = 5.$$

Эти два решения указывают два варианта положения участка (рис. 3.17, б).

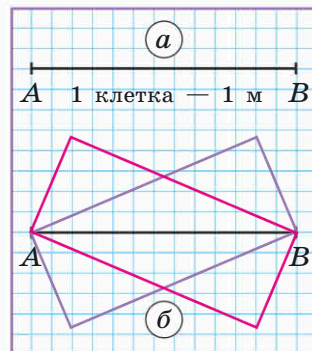


Рис. 3.17

УПРАЖНЕНИЯ

СОСТАВЛЯЕМ СИСТЕМУ УРАВНЕНИЙ ПО УСЛОВИЮ ЗАДАЧИ

- 311** Стройплощадка имеет форму прямоугольника. Длина ограждения вокруг стройплощадки 120 м, а её площадь равна 800 м^2 . Найдите стороны стройплощадки.
- 312** Сад заложен на участке прямоугольной формы. Площадь участка равна 700 м^2 , а одна из его сторон на 15 м длиннее другой. Найдите стороны участка.
- 313** Одна из сторон прямоугольника на 2 см короче другой, а его диагональ равна 10 см. Найдите стороны прямоугольника.
- 314** Спортивная площадка прямоугольной формы занимает площадь, равную 600 м^2 . Когда вокруг неё проложили дорожку шириной в 1 м, то площадка вместе с дорожкой стала занимать площадь 704 м^2 . Найдите размеры площадки.
- 315** Пароход прошёл 100 км по течению реки и 64 км против течения за 9 ч. В другой раз за то же время он прошёл 80 км против течения реки и вернулся обратно. Определите скорость парохода в стоячей воде и скорость течения.

ОТВЕЧАЕМ НА ВОПРОС ЗАДАЧИ, СОСТАВИВ И РЕШИВ СИСТЕМУ УРАВНЕНИЙ

- 316** В аудитории расставили одинаковыми рядами 84 стула. Затем добавили 36 стульев и при этом сделали перестановку: в каждом ряду уменьшили число стульев на 2, но увеличили число рядов на 4. Сколько рядов и сколько стульев в каждом ряду было в аудитории первоначально?
- 317** Периметр прямоугольного треугольника равен 24 см, его гипотенуза равна 10 см. Найдите катеты этого треугольника.
- 318** На отрезке AB как на диаметре построена полуокружность. Её радиус равен 10 см. Найдите на полуокружности точку C , такую, чтобы расстояние от этой точки до одного из концов диаметра было на 4 см больше, чем расстояние от этой точки до другого из концов диаметра. Сколько решений имеет задача? (Сделайте рисунок.)
- 319** Площадь прямоугольного треугольника равна 30 см^2 , а его гипотенуза равна 13 см. Найдите катеты треугольника.
- 320** Можно ли в круг радиуса 12,5 см вписать прямоугольник площадью 168 см^2 ?
- 321** Расстояние между пунктами A и B равно 15 км. Два велосипедиста одновременно выехали из этих пунктов навстречу друг другу, встретились через 30 мин и, не останавливаясь, продолжили путь. Один из велосипедистов прибыл в пункт B на 25 мин раньше, чем другой — в пункт A . Найдите скорость каждого велосипедиста.
- 322** **МАТЕМАТИКА ВОКРУГ НАС** Дорога от дома до школы состоит из двух участков: 300 м подъёма и 600 м спуска. Олег заметил, что дорога от дома до школы занимает у него 16 мин, а обратная дорога — 17 мин. С какой скоростью он идёт на подъёме и с какой — на спуске?

3.9

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Чем полезен графический метод решения уравнений с одной переменной.
- Алгоритм графического решения уравнения вида $f(x) = g(x)$.
- Как уточняют приближённое значение корня, найденного с помощью графиков.

ВСПОМНИТЕ:

- Как решают графически системы уравнений с двумя переменными?

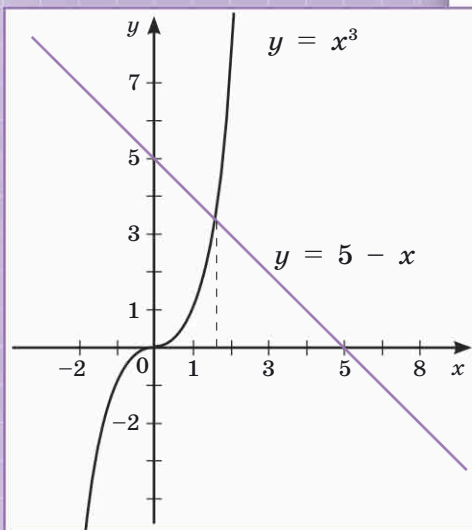


Рис. 3.18

Сколько у графиков функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ общих точек, столько корней имеет уравнение $f(x) = g(x)$.

ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

При работе с уравнениями с одной переменной может оказаться полезным графический метод. Имея график функции $y = f(x)$, нетрудно найти корни уравнения $f(x) = 0$ — это абсциссы точек, в которых функция обращается в нуль. Графические соображения позволяют также делать некоторые качественные выводы о корнях уравнения, например проверять их наличие, определять количество. Но проблема в том, что построить нужный график мы можем далеко не всегда. Однако возможность обойти эту трудность у нас иногда имеется.

ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ВИДА $f(x) = g(x)$ Пусть нужно решить уравнение $x^3 - x + 5 = 0$. Применить с этой целью алгебраические методы мы не сможем: формулами для решения уравнений третьей степени мы не располагаем, а попытка разложить левую часть уравнения на множители к успеху не приведёт. Поэтому попробуем воспользоваться графиками.

Если бы мы смогли построить график функции $y = x^3 + x - 5$, то сумели бы найти и корни уравнения $x^3 + x - 5 = 0$. Однако строить графики таких функций мы не умеем. Поэтому перепишем уравнение в виде $x^3 = 5 - x$. Это позволит нам воспользоваться графиками знакомых функций $y = x^3$ и $y = 5 - x$.

На рисунке 3.18 эти графики построены в одной системе координат. Они пересекаются в единственной точке. Абсцисса точки пересечения графиков — это то значение переменной x , при котором выражения x^3 и $5 - x$ принимают равные значения. Значит, эта абсцисса и есть корень уравнения $x^3 = 5 - x$. По рисунку видно, что корень приблизительно равен 1,5.



Решение уравнения $x^3 = 5 - x$ мы фактически свели к решению системы уравнений $\begin{cases} y = x^3, \\ y = 5 - x. \end{cases}$

Однако, найдя общую точку графиков, мы указали не обе её координаты, как это было бы при решении системы, а только её абсциссу.

Чтобы решить графически уравнение вида $f(x) = g(x)$, можно действовать по такому алгоритму:

- построить в одной и той же системе координат графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$;
- найти абсциссы всех общих точек или, если общих точек нет, сделать вывод об отсутствии корней.

Пример 1. Решим уравнение $\sqrt{x} + x = 6$.

Запишем уравнение в виде $\sqrt{x} = -x + 6$ и построим графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y = -x + 6$ (рис. 3.19). Эти графики пересекаются в единственной точке, её абсцисса равна 4. Значит, корень уравнения — число 4.

Подставив $x = 4$ в уравнение, легко убедиться, что найденный корень является точным: $\sqrt{4} = -4 + 6$ — верное равенство.

ГРАФИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ Графические соображения, а также апелляция к свойствам функций незаменимы в тех случаях, когда надо получить какую-либо информацию о корнях уравнения; причём иногда для этого достаточно схематического рисунка.

Пример 2. Выясним, имеет ли корни уравнение $x^3 + x = 300$, и если имеет, то сколько.

Перепишем уравнение в виде $x^3 = 300 - x$. В тетради графики уравнений $y = x^3$ и $y = 300 - x$ в одном масштабе построить практически невозможно. Однако простой рисунок, показывающий взаимное расположение графиков, поможет нам ответить на поставленный вопрос (рис. 3.20).

По рисунку видно, что графики должны иметь точку пересечения в правой полуплоскости. В какой-то точке они встретятся. Значит, данное уравнение имеет по крайней мере один корень. Понятно, что этот корень — единственный. В самом деле, первая функция возрастающая, а вторая — убывающая, и, встретившись, графики «продолжат движение» в своих направлениях, поэтому другой точки пересечения у них не будет.

Глядя на рисунок, мы можем сделать и другие заключения о корне уравнения $x^3 = 300 - x$. Например, что этот корень положительный, и что он меньше 300.

УТОЧНЕНИЕ ПРИБЛИЖЁННЫХ ЗНАЧЕНИЙ КОРНЕЙ С помощью графиков корни уравнения можно, как правило, найти лишь с невысокой точностью. Поэтому, если требуется большая точность результата, найденное приближённое значение корня уточняют путём вычислений.

Вернёмся к уравнению $x^3 = 5 - x$, рассмотренному в начале пункта. По рисунку видно, что корень принадлежит промежутку (1; 2). Этот промежуток можно указать более точно: (1,5; 2). Действительно, при $x = 1,5$ значение x^3 меньше, чем значение $5 - x$, а при $x = 2$ — больше. Значит, при $x = 1,5$ первый график находится ниже второго, а при $x = 2$ — выше.

Вычисляя и сравнивая значения левой и правой частей уравнения, можно всё более точно определять промежуток, в котором находится корень: (1,5; 1,6), (1,51; 1,52) и т.д. Таким способом можно в принципе получать значения корня с любой точностью: $x \approx 1,5$; $x \approx 1,51$ и т.д.

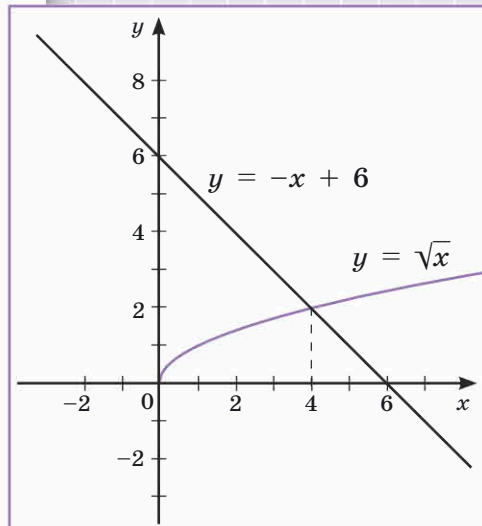


Рис. 3.19

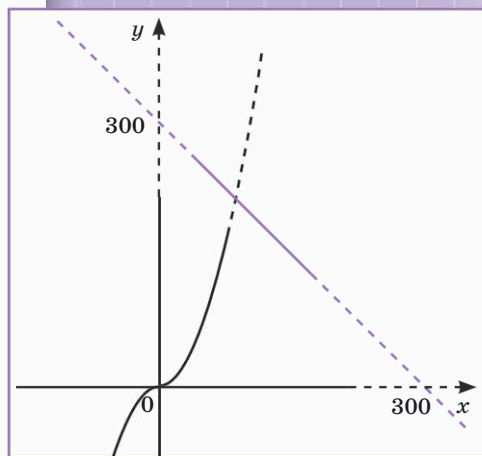


Рис. 3.20

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

● Что общего у графических способов решения систем уравнений с двумя переменными и уравнения с одной переменной и чем они различаются?

● Графики функций

$$y = f(x) \text{ и } y = g(x)$$

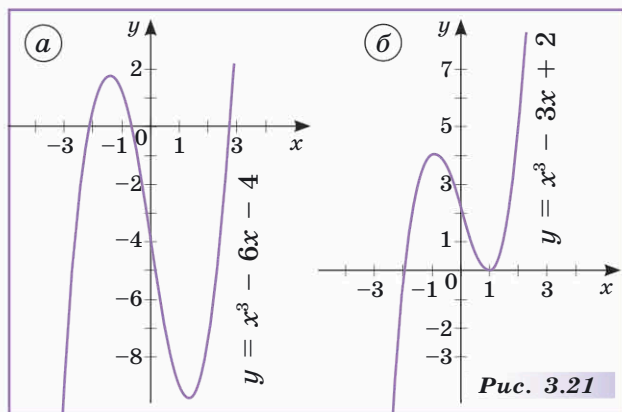
пересекаются в точке $M(a; b)$. Дайте два алгебраических толкования этого утверждения, используя слова «уравнение» и «система уравнений».

УПРАЖНЕНИЯ

РЕШАЕМ УРАВНЕНИЯ ГРАФИЧЕСКИ

323

Запишите уравнение вида $f(x) = 0$, графическое решение которого приведено на рисунке 3.21. Выясните, сколько корней имеет уравнение. Найдите корни. Есть ли среди них точные?



324

Запишите уравнение вида $f(x) = g(x)$, графическое решение которого приведено на рисунке 3.22. Найдите корни уравнения.

325

Графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y = 2x - 6$ пересекаются в точке (4; 2).

Сделайте схематический чертёж, иллюстрирующий этот факт.

Назовите:

- 1) решение системы уравнений $\begin{cases} y = \sqrt{x}, \\ y = 2x - 6; \end{cases}$
- 2) корень уравнения $\sqrt{x} = 2x - 6$.

326

С помощью графиков определите, сколько корней имеет уравнение, и найдите эти корни:

- а) $x^2 = 1,5x + 1$; б) $x^3 = 2 - x$; в) $x^2 - 1 = \frac{8}{x}$.

327

Найдите с помощью графиков приближённые значения корней уравнений:

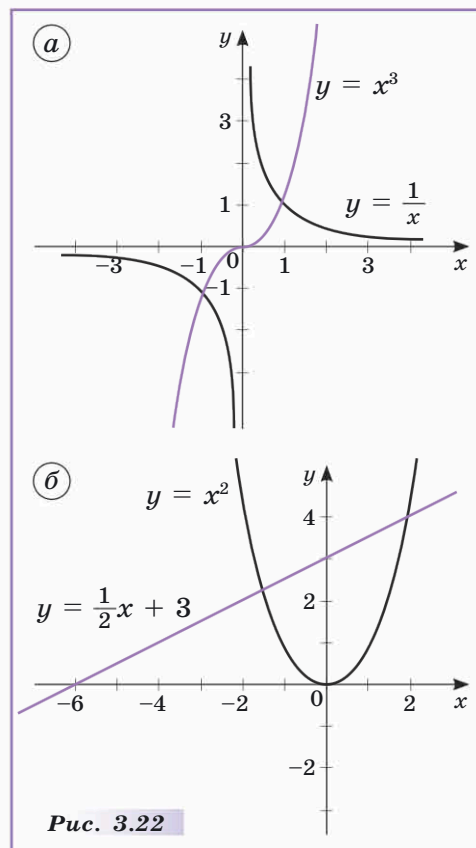
- 1) $x^2 - x - 3 = 0$; 3) $\frac{1}{2}x^2 - x - 1 = 0$;
- 2) $x^2 + 2x - 2 = 0$; 4) $3 - x - 3x^2 = 0$.

Совет. Выполните задание экономно, с минимальным количеством построений. Для этого представьте каждое уравнение в виде $x^2 = ax + b$ и постройте в одной системе координат параболу $y = x^2$ и четыре прямые. (Воспользуйтесь миллиметровой бумагой.)

328

Решите графически уравнения:

- 1) $x^3 - 2x - 4 = 0$; 2) $x^3 - 2x + 4 = 0$; 3) $x^3 + 2x - 4 = 0$.
- Есть ли среди корней точные?



ИССЛЕДУЕМ УРАВНЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ГРАФИКОВ

329

С помощью графиков определите, имеет ли уравнение корни, и укажите знаки корней (если они есть):

а) $x^3 = \frac{6}{x}$; б) $x^3 = -\frac{1}{x}$; в) $\sqrt{x} = \frac{1}{x}$; г) $\sqrt{x} = 1 - x^2$.

330

Выясните, сколько корней имеет уравнение; для каждого корня укажите два последовательных целых числа, между которыми он находится:

а) $\frac{1}{x} = x^2 - 4$; б) $x^3 - x - 9 = 0$.

331

По графику функции $y = f(x)$, изображённому на рисунке 3.23, выясните, сколько корней имеет уравнение:

1) $f(x) = 0$, $f(x) = 2$, $f(x) = 1$, $f(x) = -1$, $f(x) = -3$;

2) $f(x) = x^2$, $f(x) = \frac{1}{x}$.

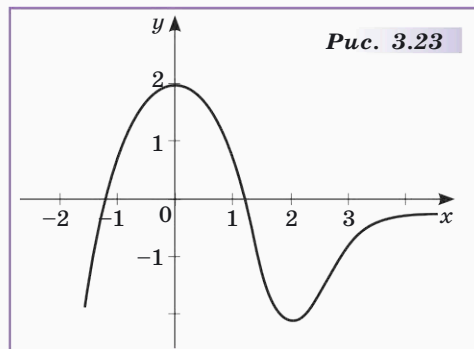


Рис. 3.23

332

Найдите подбором корень уравнения и, используя графические соображения, докажете, что других корней нет:

а) $\sqrt{x} = 12 - x$; б) $x^3 + x + 10 = 0$; в) $x^2 - \frac{4}{x} + 3 = 0$.

333

Дано уравнение $\sqrt{x} = 0,5x - 4$.

1) Какому из промежутков принадлежит корень этого уравнения — $[0; 10]$ или $[10; 20]$?

2) К какому из концов найденного промежутка корень ближе — к правому или к левому?

334

Используя схематические графики, определите, сколько корней имеет уравнение; укажите два последовательных целых числа, между которыми находятся корни уравнения:

а) $\sqrt{x} = x - 500$; б) $\sqrt{x} = 100 - x^2$.

УТОЧНЯЕМ ПРИБЛИЖЁННОЕ ЗНАЧЕНИЕ КОРНЯ

При выполнении заданий № 335–336 используйте калькулятор.

335

1) Используя графические соображения, покажите, что уравнение $x^3 = 4 - x^2$ имеет единственный корень.

2) Убедитесь, что корень этого уравнения принадлежит каждому из промежутков: $[1; 2]$, $[1; 1,5]$, $[1,3; 1,5]$, $[1,3; 1,4]$.

Как начинается десятичная запись корня уравнения?

336

С помощью графиков определите количество корней уравнения

$$x^2 - 4x - \sqrt{x} + 4 = 0.$$

Найдите приближение большего корня с одним знаком после запятой.

337

Как начинается десятичная запись положительного корня уравнения $\sqrt{x} = 0,5x^2$? (Найдите два знака после запятой.)

УЗНАЙТЕ БОЛЬШЕ

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ

Решение систем, содержащих два уравнения второй степени с двумя переменными, является в принципе трудной задачей, выходящей за рамки школьного курса. Однако в некоторых частных случаях такие системы могут быть решены с помощью простых и изящных приёмов.

Пример 1. Вернёмся ещё раз к системе уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ xy = -3, \end{cases}$ которую мы решали способом подстановки (см. с. 107). Разберём другие способы её решения. Основная идея каждого из них состоит в том, чтобы свести данную систему к системам более простого вида.

Способ 1. Первое уравнение системы задаёт значение суммы квадратов переменных x и y , а второе — их произведения. Имея эту информацию, легко найти значение выражения $(x + y)^2$. Для этого умножим обе части второго уравнения системы на 2 и сложим его с первым. Получим уравнение

$$x^2 + y^2 + 2xy = 10 - 6, \text{ т.е. } (x + y)^2 = 4.$$

Вместе со вторым уравнением оно образует систему $\begin{cases} (x + y)^2 = 4, \\ xy = -3. \end{cases}$

Из равенства $(x + y)^2 = 4$ следует, что $x + y = 2$ или $x + y = -2$. Таким образом, система распадается на две более простые:

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ xy = -3 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x + y = -2, \\ xy = -3. \end{cases}$$

Решениями исходной системы служат те и только те пары значений x и y , которые удовлетворяют хотя бы одной из этих систем. Иными словами, множество решений исходной системы есть объединение множеств решений двух полученных систем. Говорят, что *система равносильна совокупности двух систем*.

Систему вида $\begin{cases} x + y = a, \\ xy = b \end{cases}$ легко решить способом подстановки. Решением первой системы служат пары $(-1; 3)$ и $(3; -1)$; решением второй — пары $(1; -3)$ и $(-3; 1)$. Каждая из этих пар удовлетворяется исходной системе, и других решений она не имеет.

Ответ: система имеет четыре решения: $(-1; 3)$, $(3; -1)$, $(1; -3)$, $(-3; 1)$.

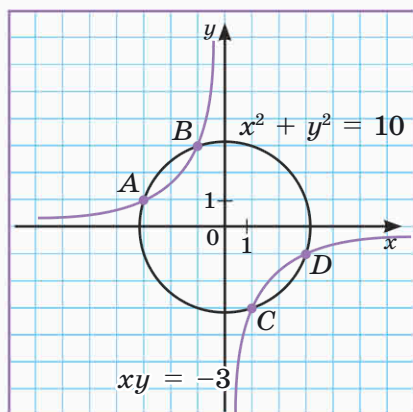


Рис. 3.24

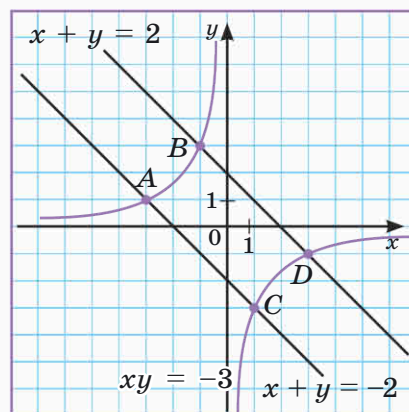


Рис. 3.25

Чтобы лучше понять содержательную сторону приведённого решения, обратимся к графической иллюстрации. На рисунке 3.24 построены окружность и гипербола — графики уравнений, входящих в систему $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ xy = -3. \end{cases}$ Они пересекаются в четырёх точках.

На рисунке 3.25 показано графическое решение систем

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ xy = -3 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x + y = -2, \\ xy = -3. \end{cases}$$

В одной системе координат построены гипербола $xy = -3$ и прямые $x + y = 2$ и $x + y = -2$. Каждая прямая пересекает гиперболу $xy = -3$ в двух точках, а всего мы имеем четыре точки пересечения. Это те же точки, которые получились при пересечении гиперболы и окружности.

Способ 2. Сложим почленно первое уравнение системы $x^2 + y^2 = 10$ сначала с уравнением $2xy = -6$, а затем с уравнением $-2xy = 6$. Получим систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2xy = 10 - 6, \\ x^2 + y^2 - 2xy = 10 + 6, \end{cases} \quad \text{т.е.} \quad \begin{cases} (x + y)^2 = 4, \\ (x - y)^2 = 16. \end{cases}$$

Из первого уравнения получаем $x + y = 2$ или $x + y = -2$.

Из второго уравнения находим: $x - y = 4$ или $x - y = -4$.

Рассматривая каждое из уравнений первой пары совместно с каждым уравнением второй пары, приходим к четырём системам линейных уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ x - y = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = -2, \\ x - y = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 2, \\ x - y = -4; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = -2, \\ x - y = -4. \end{cases}$$

Множество решений исходной системы есть объединение множеств решений этих систем. Решив каждую из них, получим в результате четыре пары чисел: $(3; -1)$, $(1; -3)$, $(-1; 3)$, $(-3; 1)$.

Рассмотренное решение проиллюстрировано графически на рисунке 3.26. Теперь мы имеем четыре прямые. При попарном пересечении они указывают нам те же четыре точки, которые получались при пересечении окружности и гиперболы (см. рис. 3.24), а также гиперболы и двух прямых (рис. 3.25).

Пример 2. Решим систему уравнений $\begin{cases} x^4 + y^4 = 97, \\ xy = 6. \end{cases}$

Преобразуем первое уравнение системы, выделив в левой части квадрат двучлена: $\begin{cases} (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = 97, \\ xy = 6. \end{cases}$

Подставив в первое уравнение вместо xy число 6, получим уравнение $(x^2 + y^2)^2 - 2 \cdot 36 = 97$, т.е. $(x^2 + y^2)^2 = 169$.

Значение выражения $x^2 + y^2$ не может быть отрицательным, поэтому приходим к уравнению $x^2 + y^2 = 13$.

Таким образом, исходная система свелась к более простой: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ xy = 6, \end{cases}$

для которой вы теперь знаете несколько способов решения.

Ответ: система имеет четыре решения:

$$(2; 3), (3; 2), (-2; -3), (-3; -2).$$

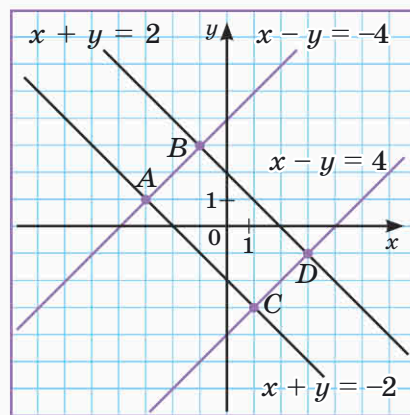


Рис. 3.26

1 Система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 34, \\ xy = 15 \end{cases}$ имеет четыре решения. Одно из них — пара чисел (3; 5). Не решая систему, укажите остальные три решения.

2 Решите систему уравнений разными способами (в качестве образца воспользуйтесь примером 1):

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 41, \\ xy = 20; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = -12. \end{cases}$

3 1) Рассмотрим систему $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 7, \\ x + xy + y = 5. \end{cases}$ Входящие в неё уравнения содержат сумму переменных $x + y$, их произведение xy и сумму квадратов $x^2 + y^2$. Сумму квадратов $x^2 + y^2$ можно выразить через сумму $x + y$ и произведение xy :

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy.$$

И система примет вид $\begin{cases} (x + y)^2 - xy = 7, \\ (x + y) + xy = 5. \end{cases}$ Такую систему удобно решить с помощью замены: $x + y = a$, $xy = b$. Получим систему $\begin{cases} a^2 - b = 7, \\ a + b = 5. \end{cases}$

Решив её, найдём две пары чисел a и b , удовлетворяющих системе:

$$a_1 = -4, b_1 = 9 \quad \text{и} \quad a_2 = 3, b_2 = 2.$$

Выполнив обратную замену, получим две системы уравнений, на которые распадается исходная система:

$$\begin{cases} x + y = -4, \\ xy = 9 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x + y = 3, \\ xy = 2. \end{cases}$$

Первая система решений не имеет, решения второй — пары (1; 2) и (2; 1).

Ответ: (1; 2), (2; 1).

2) Воспользовавшись приёмом, разобранным в п. 1, решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 21, \\ x + xy + y = 9. \end{cases}$$

4 Решите систему уравнений $\begin{cases} (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 18, \\ (x - 1)(y - 2) = 9 \end{cases}$ с помощью подходящей замены.

5 Предложите замену, которая упростила бы систему $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 2y = 11, \\ (x + 1)^2 - (y + 1)^2 = 5. \end{cases}$

Решите систему, введя новые переменные.

6 Система уравнений $\begin{cases} x^3 + y^3 = 35, \\ x + y = 5 \end{cases}$ содержит уравнение третьей степени, но решается она довольно просто. Решите её двумя способами.

Способ 1. Воспользуйтесь подстановкой, например $y = 5 - x$, и затем примените к выражению $(5 - x)^3$ формулу куба разности $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

Способ 2. Выразите $x^3 + y^3$ через $x + y$ и xy с помощью формулы куба суммы, но записанной в виде $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$. Затем подставьте вместо суммы $x + y$ её значение, известное из второго уравнения.

7 Решите систему уравнений $\begin{cases} x^4 + y^4 = 32, \\ x^2 + y^2 = 8. \end{cases}$

Совет. Примените замену $x^2 = a$, $y^2 = b$.

8 Решите систему уравнений $\begin{cases} x^4 + y^4 = 17, \\ xy = -2, \end{cases}$ воспользовавшись в качестве образца примером 2.

УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРОМ

Когда говорят «уравнение с параметром», то это означает, что речь идёт об уравнении, в котором есть буквенные коэффициенты. Так, в квадратном уравнении $x^2 - bx + 1 = 0$ буква b — параметр. Подставив вместо b какое-либо число, мы получим обычное квадратное уравнение с числовыми коэффициентами. Понятно, что коэффициент b можно заменить любым числом, поэтому, в сущности, мы имеем дело с целым семейством квадратных уравнений. Решая уравнение с параметром, мы получаем информацию о всём бесконечном множестве порождаемых им уравнений.

Так, решая квадратное уравнение $x^2 - bx + 1 = 0$, необходимо рассмотреть случаи, когда оно имеет два корня, один корень, не имеет корней. Для этого найдём его дискриминант и выясним, при каких значениях b выполняются условия: $D = 0$, $D > 0$, $D < 0$.

Получим $D = b^2 - 4$;

$b^2 - 4 = 0$, если $|b| = 2$, т.е. если $b = -2$ или $b = 2$;

$b^2 - 4 > 0$, если $|b| > 2$, т.е. если $b < -2$ или $b > 2$;

$b^2 - 4 < 0$, если $|b| < 2$, т.е. если $-2 < b < 2$.

Значит,

при $b = -2$ и при $b = 2$ уравнение $x^2 - bx + 1 = 0$ имеет один корень;

при $b < -2$ и при $b > 2$ уравнение $x^2 - bx + 1 = 0$ имеет два корня;

при $-2 < b < 2$ уравнение $x^2 - bx + 1 = 0$ не имеет корней.

Результат, который мы получили, можно проиллюстрировать с помощью графиков (рис. 3.27). Для этого представим уравнение $x^2 - bx + 1 = 0$ в виде $x^2 = bx - 1$. График уравнения $y = x^2$ — парабола, а уравнение $y = bx - 1$ задаёт пучок прямых, проходящих через точку $(0; -1)$.

При $b = -2$ и $b = 2$ получаем прямые $y = 2x - 1$ и $y = -2x - 1$. Каждая из этих прямых имеет с параболой одну общую точку.

При $b < -2$ и $b > 2$, прямые идут более круто; каждая из них пересекает параболу в двух точках.

При $-2 < b < 2$ прямые более пологие, они не имеют с параболой общих точек.

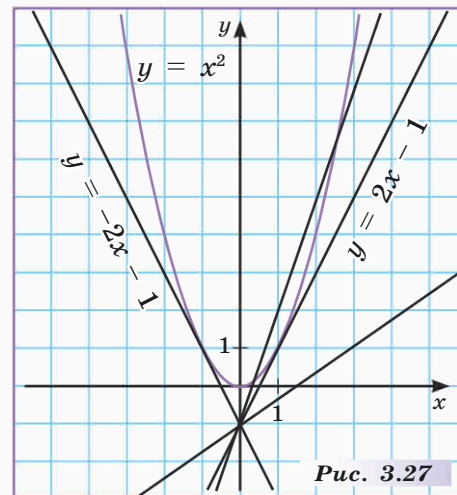


Рис. 3.27

Задача решения уравнения с параметром всегда предполагает рассмотрение нескольких случаев, ни один из которых нельзя «потерять».

Пример 1. Решим уравнение $(a + 2)x = a^2 + a - 2$, где x — переменная, a — параметр.

Подставляя вместо параметра a различные числа, мы будем получать разные уравнения, но все они окажутся линейными. Вы решали много линейных уравнений и встречали, например, такие, как $2x = 3$ или $0x = 5$, $0x = 0$. Чтобы найти корень уравнения $2x = 3$, нужно обе его части разделить на 2. Для уравнений $0x = 5$ и $0x = 0$ этот приём не годится, так как на нуль делить нельзя.

В уравнении $(a + 2)x = a^2 + a - 2$ коэффициент при переменной x буквенный. Поэтому, решая это уравнение, необходимо рассмотреть два случая:

$$a + 2 = 0 \text{ и } a + 2 \neq 0.$$

1) Пусть $a + 2 = 0$, т.е. $a = -2$. Подставив $a = -2$ в уравнение $(a + 2)x = a^2 + a - 2$, получим уравнение $0x = 0$. Его корнем является любое число.

2) Пусть $a + 2 \neq 0$, т.е. $a \neq -2$. Поступим так же, как и при решении линейного уравнения с числовым коэффициентом: разделим обе части уравнения $(a + 2)x = a^2 + a - 2$ на коэффициент при x . Получим $x = \frac{a^2 + a - 2}{a + 2}$.

Сократив дробь, найдём, что $x = a - 1$.

Ответ: если $a = -2$, то корнем уравнения является любое число; если $a \neq -2$, то уравнение имеет единственный корень, равный $a - 1$.

Пример 2. Решим уравнение $ax^2 - 2(a - 1)x - 4 = 0$ с параметром a .

Это уравнение кажется квадратным. Но на самом деле квадратным оно будет только при том условии, что коэффициент при x^2 отличен от нуля. Поэтому необходимо рассмотреть два случая: $a = 0$ и $a \neq 0$.

1) Пусть $a = 0$. Подставим $a = 0$ в данное уравнение. Получим линейное уравнение $2x - 4 = 0$. Оно имеет единственный корень — число 2.

2) Пусть $a \neq 0$. Теперь у нас уравнение квадратное. Оно имеет корни, если дискриминант уравнения неотрицателен.

Найдём дискриминант D_1 : $D_1 = (a - 1)^2 + 4a = (a + 1)^2$.

Если $a = -1$, то $D_1 = 0$. В этом случае квадратное уравнение имеет единственный корень. Его легко найти, подставив в уравнение $a = -1$. Получим $-x^2 + 4x - 4 = 0$, т.е. $x^2 - 4x + 4 = 0$, откуда находим, что $x = 2$.

Если $a \neq -1$, то $D_1 > 0$. По формуле корней получим $x = \frac{(a - 1) \pm (a + 1)}{a}$, откуда $x_1 = 2$ и $x_2 = -\frac{2}{a}$.

Ответ: при $a = 0$ и $a = -1$ уравнение имеет единственный корень равный 2; при $a \neq 0$ и $a \neq -1$ уравнение имеет два корня: $x_1 = 2$ и $x_2 = -\frac{2}{a}$.

1 Решите уравнение с переменной x :

- а) $(m - 1)x = m^2 - 1$; в) $(2 - a)x = a^2 - 4$;
б) $(c - 2)x = c + 2$; г) $(b^2 - 1)x = b + 1$.

2 Выясните, при каких значениях параметра a уравнение имеет два корня:

- а) $ax^2 - (a + 1)x + 1 = 0$; б) $ax^2 - (a^2 + 4)x + 4a = 0$.

3 Докажите, что при любых значениях a уравнение имеет хотя бы один корень:

- а) $x^2 - 5ax + 6a^2 = 0$; б) $(x + a)(x - a) = 1 - 2a$.

4 При каких значениях параметра c данное уравнение имеет два корня; имеет два корня разных знаков:

- а) $x^2 - 12x + c = 0$; б) $x^2 + cx - 4 = 0$; в) $2x^2 + cx + 2 = 0$?

5 С помощью графиков выясните, сколько корней может иметь уравнение, в котором a — параметр:

- а) $|x| = ax - 1$; б) $|x| = ax + 2$.

Пример 3. Выясним, при каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} x - y = a, \\ x^2 + y^2 = 8 \end{cases}$$

имеет единственное решение, и найдём это решение.

Такие системы мы решаем способом подстановки, поступим так же и в этом случае.

Выразим из первого уравнения переменную y и подставим полученное выражение во второе уравнение:

$$y = x - a, \quad x^2 + (x - a)^2 = 8, \quad 2x^2 - 2ax + a^2 - 8 = 0.$$

Задача свелась к исследованию квадратного уравнения с параметром a : надо найти все такие значения a , при которых это уравнение имеет один корень.

Квадратное уравнение имеет единственный корень в том и только том случае, когда его дискриминант равен нулю. Найдём D_1 и решим уравнение $D_1 = 0$:

$$D_1 = a^2 - 2(a^2 - 8) = -a^2 + 16; \quad 16 - a^2 = 0, \quad \text{откуда } a = \pm 4.$$

Таким образом, система уравнений имеет единственное решение, если $a = 4$ или $a = -4$. Найдём решение системы в каждом из этих случаев.

Если $a = 4$, то получаем систему $\begin{cases} x - y = 4, \\ x^2 + y^2 = 8. \end{cases}$ Решив её, найдём пару $x_1 = 2, y_1 = -2$.

Если $a = -4$, то получаем систему $\begin{cases} x - y = -4, \\ x^2 + y^2 = 8. \end{cases}$ Решив её, найдём пару $x_2 = -2, y_2 = 2$.

Ответ: система уравнений имеет единственное решение при $a = 4$ и при $a = -4$; в первом случае решение системы — пара $(2; -2)$, во втором — пара $(-2; 2)$.

Дадим полученному результату графическую трактовку (рис. 3.28). График уравнения $x^2 + y^2 = 8$ — окружность с центром в начале координат, а графики уравнений $x - y = 4$ и $x - y = -4$ — прямые. Каждая из прямых касается окружности, т.е. имеет с окружностью одну общую точку, координаты которой и служат решением соответствующей системы уравнений.

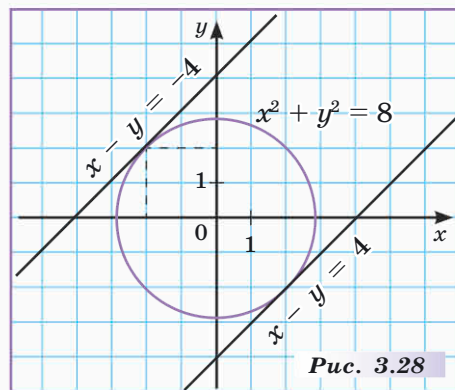


Рис. 3.28

6 Решите систему линейных уравнений (x, y — переменные, a — параметр):

а) $\begin{cases} x + 2y = 1, \\ 3x + ay = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x - y = 1, \\ 2ax - 3y = 3. \end{cases}$

7 При каких значениях параметра a решением системы уравнений

$$\begin{cases} x + y = a + 1, \\ 3x - y = a - 1. \end{cases}$$

является: пара положительных чисел? пара отрицательных чисел? пара чисел, одно из которых 0?

8 Найдите значения параметра b , при которых точка пересечения прямых $y = 10 - 2x$ и $y = 4x + b$ находится в четвёртой координатной четверти.

9 Сколько решений может иметь система уравнений $\begin{cases} y = 1 - x^2, \\ y = x^2 + c? \end{cases}$

Укажите значения c , при которых система имеет одно решение; не имеет решений.

10 Дана система уравнений с переменными x и y : $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y = |x| + a. \end{cases}$

1) С помощью графиков установите, сколько решений может иметь эта система.
2) Найдите значения a , при которых система имеет два решения; три решения.

11 При каких значениях параметра c прямая $x + y = c$ касается окружности $x^2 + y^2 = 2$? пересекает эту окружность?

ПОДВЕДЁМ ИТОГИ

Рациональные выражения. Тождество

Алгебраическое выражение, составленное из чисел и букв с помощью действий сложения, вычитания, умножения и деления, называют **рациональным**.

Рациональные выражения подразделяются на **целые** и **дробные**. Целым называют рациональное выражение, не содержащее деления на выражение с переменными. В противном случае выражение называют дробным.

Множество всех значений переменных, при которых выражение имеет смысл, называют **областью определения выражения**.

Равенство, которое обращается в верное числовое равенство при всех значениях переменных, при которых обе его части имеют смысл, называется **тождеством**.

Примеры рациональных выражений:

$$0,5abc, \frac{a+b}{4}, \frac{4}{a}, a^{-2} + 2b.$$

$0,5abc, \frac{a+b}{4}$ — целые выражения;

$\frac{4}{a}, a^{-2} + 2b$ — дробные выражения.

Пример. Найдём область определения выражения $\frac{a}{a^2 - 1}$.

Решим уравнение $a^2 - 1 = 0$; получим $a_1 = 1, a_2 = -1$.

Ответ: $a \neq 1$ и $a \neq -1$.

Примеры тождеств:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$

$$\frac{a}{a-3} = -\frac{a}{3-a}; \quad \frac{a^2 - b^2}{a-b} = a + b.$$

- 1 Разбейте выражения

$$x^2 - 3; \quad \frac{2}{x-3}; \quad \frac{a}{3} - \frac{b}{2} + 1; \quad \frac{1}{m} + \frac{1}{n}; \quad 5a^2bc^3$$

на целые и дробные. Каким общим термином можно назвать все перечисленные выражения?

- 2 Вычислите значение выражения при указанных значениях переменных:

а) $1 - 0,5a^2 + 2a^3$ при $a = -1$; в) $\frac{a+b}{b}$ при $a = -2,5$ и $b = 3$;

б) $\frac{2x^3 - x}{2}$ при $x = -2$; г) $x - y - 3z$ при $x = -0,4, y = -0,6, z = -0,3$.

- 3 Найдите область определения выражения:

а) $\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$; б) $\frac{2x}{(x-1)(x+5)}$; в) $\frac{x-4}{12x+3x^2}$; г) $\frac{x^2-3}{x^2+3}$.

- 4 Упростите выражение:

а) $\frac{a^2-1}{a^2} - \frac{a^2-9}{a} \cdot \frac{1}{a+3}$; в) $2a - \frac{a^2-5a}{a+1} \cdot \frac{1}{a-5}$;

б) $\left(\frac{x-y}{x+y} - \frac{x+y}{x-y}\right) : \frac{4}{x^2-y^2}$; г) $(x+4) \cdot \frac{x+6}{x^2-16} - \frac{x-6}{x-4}$.

- 5 Докажите тождество $x(x+y) - y(x+y) = x^2 - y^2$.

- 6 Докажите, что равенство $(x-1)^2 = x^2 - 1$ не является тождеством.

Уравнения с одной переменной

Уравнение, обе части которого — целые выражения, называют **целым уравнением**.

Для решения целых уравнений выше второй степени применяют приёмы **разложения на множители** и **замены переменной**.

Уравнения, в которые входят выражения, содержащие переменную в знаменателе, называют **дробно-рациональными** (или просто **дробными**).

Способ решения:

- находят общий знаменатель дробей, входящих в уравнение;
- умножают на него обе части уравнения;
- решают целое уравнение;
- исключают посторонние корни (если они есть).

Пример. Решим уравнение:

а) $x^3 - 9x = 0$;

б) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$.

а) Разложим на множители двучлен $x^3 - 9x$.

Получим $x(x - 3)(x + 3) = 0$, откуда $x = 0$, или $x - 3 = 0$, или $x + 3 = 0$.

Ответ: 0; 3; -3.

б) Введём замену $x^2 = y$.

Получим уравнение:

$$y^2 - 3y - 4 = 0;$$

$$y_1 = 4, y_2 = -1.$$

Приходим к уравнениям с переменной x :

$$x^2 = 4; x_1 = -2, x_2 = 2;$$

$$x^2 = -1 \text{ — корней нет.}$$

Ответ: -2; 2.

Пример. Решим уравнение

$$\frac{1}{x^2 - x} + 1 = \frac{3}{x};$$

1) $x(x - 1)$ — общий знаменатель;

$$2) 1 + x(x - 1) = 3(x - 1);$$

$$3) x^2 - 4x + 4 = 0,$$

$$(x - 2)^2 = 0; x = 2;$$

4) число 2 не является постоянным корнем.

Ответ: 2.

Решите уравнение (№ 7–8):

7 а) $x^3 + 2x^2 = 0$; б) $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$.

8 а) $\frac{3}{x+2} - 5 = \frac{4}{x-2}$;

в) $x + \frac{4}{x} = 4$;

д) $\frac{x}{x-2} = \frac{10}{x+1}$;

б) $\frac{x-3}{x} + \frac{7}{x+3} = \frac{5}{4}$;

г) $\frac{x^2 - 7x - 8}{x+1} = 0$;

е) $\frac{1-x}{2-x} = 2$.

9 Решите задачу:

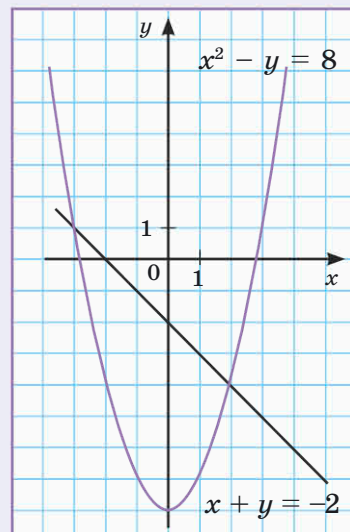
а) Лодка за одно и то же время может проплыть по течению реки 45 км, а против течения — 27 км. Скорость течения реки 3 км/ч. С какой скоростью плывёт лодка в стоячей воде?

б) Велосипедист проехал 4 км по участку шоссе, на котором шёл ремонт, и 6 км — по уже отремонтированному участку. Его скорость на первом участке была на 4 км/ч меньше, чем на втором. На весь путь он затратил 1 ч. С какой скоростью ехал велосипедист на каждом участке?

Системы уравнений с двумя переменными

Графический способ решения систем двух уравнений с двумя переменными:

- строят в одной системе координат графики уравнений;
- находят координаты общих точек графиков.



$$\begin{cases} x^2 - y = 8, \\ x + y = -2; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -3, \\ y_1 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 2, \\ y_2 = -4. \end{cases}$$

Систему, содержащую уравнения первой и второй степени, решают **способом подстановки**. Для этого:

- выражают из уравнения первой степени одну переменную через другую;
- подставляют полученное выражение во второе уравнение;
- решают уравнение с одной переменной;
- находят соответствующие значения второй переменной.

Пример. Решим систему

$$\begin{cases} x^2 - 3y = -9, \\ x + y = 3. \end{cases}$$

- 1) $y = 3 - x$;
- 2) $x^2 - 3(3 - x) = -9$;
- 3) $x^2 + 3x = 0$,
 $x_1 = 0$, $x_2 = -3$;
- 4) $y_1 = 3$, $y_2 = 6$.

Ответ: (0; 3), (-3; 6).

10 Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x + y = 2, \\ x^2 + 2y = 12; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = -14; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 26, \\ x - y = 4. \end{cases}$

11 Вычислите координаты точек пересечения графиков функций $y = 4 - x^2$ и $y = x - 2$.

12 Решите задачу:

- а) Прямоугольный участок земли площадью 60 м^2 обнесён изгородью, длина которой 32 м. Найдите длины сторон участка.
- б) Диагональ прямоугольника равна 20 см, и одна сторона на 4 см больше другой. Найдите длины сторон прямоугольника.



4

ГЛАВА

АРИФМЕТИЧЕСКАЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИИ

- ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ
- АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ
- СУММА ПЕРВЫХ n ЧЛЕНОВ АРИФМЕТИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ
- ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ
- СУММА ПЕРВЫХ n ЧЛЕНОВ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ
- ПРОСТЫЕ И СЛОЖНЫЕ ПРОЦЕНТЫ

Узнайте больше

- ☐ БЕСКОНЕЧНО УБЫВАЮЩАЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ
- ☐ ТРЕУГОЛЬНИК ПАСКАЛЯ

СОФЬЯ КОВАЛЕВСКАЯ

Первая русская женщина-математик и первая в мире женщина-профессор математики, Софья Васильевна Ковалевская познакомилась с математикой в раннем детстве: из-за нехватки обоев стены её детской оклеили листами лекций по высшей математике. Непонятные знаки завораживали Софью, формулы оставались в памяти.

Необыкновенный математический талант Ковалевской поражал современников. Её заслуги были отмечены большой премией Парижской академии наук, премией Шведской академии наук. Наиболее важные её исследования относятся к теории вращения твёрдого тела, а также к области математической физики и небесной механики.

Она была разносторонне одарённой личностью, обладая, помимо математического, несомненным литературным талантом. Опубликованные ею повести и мемуары были с восторгом приняты русской читающей публикой.

Яркая, необыкновенная личность и судьба Ковалевской сделала её героиней многих книг и фильмов, её именем названы астероид и лунный кратер, многие учебные заведения. Ежегодно отделение математики Российской академии наук присуждает Премию имени С.В. Ковалевской за выдающиеся результаты в области математики.

4.1

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Какая последовательность и почему называется последовательностью Фибоначчи.
- Об удобстве использования для записи последовательностей индексных обозначений.
- Что означают слова «задать числовую последовательность» и какие для этого есть способы.
- Какую формулу и почему называют рекуррентной.

Примеры последовательностей

1; 2; 3; 4; 5; ... — последовательность натуральных чисел;

2; 4; 6; 8; 10; ... — последовательность чётных чисел;

1; 3; 5; 7; 9; ... — последовательность нечётных чисел;

1; 4; 9; 16; 25; ... — последовательность квадратов натуральных чисел;

1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{5}$; ... — последовательность чисел, обратных натуральным.

ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

В математике часто рассматривают процессы, которые выполняются последовательно, по шагам. Вспомните, чтобы получить десятичную запись числа $\sqrt{2}$, мы вычисляли одно за другим его приближённые значения с недостатком с точностью до 0,1, 0,01, 0,001 и т.д. В результате пришли к *последовательности* дробей 1,4; 1,41; 1,414; Последовательности могут образовывать не только числа, как в нашем примере, но и объекты другой природы. Например, в геометрии рассматривают последовательность правильных вписанных в окружность многоугольников, получаемых при неограниченном удвоении числа сторон. Но сейчас для нас предметом изучения станут *числовые последовательности*.

ПРИМЕРЫ ЧИСЛОВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ Будем выписывать одно за другим натуральные числа, делящиеся на 5. Первым запишем число 5, вторым — число 10, третьим — число 15 и т.д. Ясно, что на десятом месте будет число 50, на двадцатом — число 100, на сотом — число 500. Вообще, на месте с произвольным номером n окажется число равное $5n$. Получаем *последовательность натуральных чисел, кратных 5*:

5; 10; 15; ... ; 50; ... ; 100; ... ; $5n$;

В рассмотренной последовательности все числа разные. Но бывают и другие последовательности, как, например, последовательность 1; 0; 1; 0; 1; 0; В ней встречается только два числа — нуль и единица, расположенные соответственно на чётных и нечётных местах. А последовательность 3; 3; 3; 3; 3; ... составлена из одинаковых чисел. Такую последовательность называют *постоянной*.

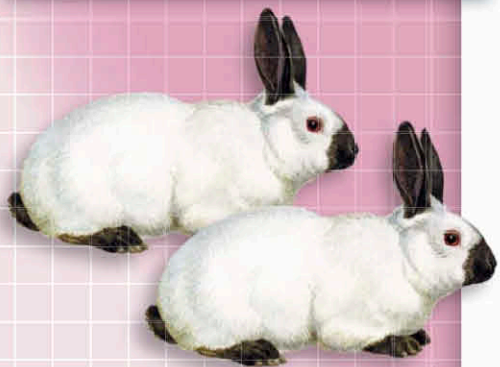


Во всех приведённых примерах фигурируют *бесконечные последовательности*. Однако последовательность может быть и *конечной*. Такой, например, является последовательность двузначных чисел

10; 11; 12; 13; ... ; 98; 99.

Можно указать не только первое двузначное число, но и последнее, а всего таких чисел девяносто.

Интересную числовую последовательность получил в XIII в. итальянский математик Леонардо Фибоначчи, решая задачу о размножении кроликов. Вот эта задача: «Пара кроликов, начиная с двухмесячного возраста, ежемесячно приносит новую пару. Сколько всего пар будет через год, если изначально была одна пара новорождённых кроликов и ни одна пара за год не погибла?»



Чтобы ответить на вопрос задачи, будем подсчитывать число пар кроликов по месяцам. Для этого воспользуемся следующей схемой:

Месяц	Пары кроликов	Число пар
I		1
II		1
III		2
IV		3
V		5
VI		8
VII		13

Кружочек — это пара кроликов. Стрелка, направленная вниз, указывает на эту же пару в следующем месяце, а стрелка, направленная вправо, указывает на появившееся потомство этой пары.

На схеме видно, как шёл прирост кроликов в первые семь месяцев. Выписывая число пар по месяцам, получим:

1; 1; 2; 3; 5; 8; 13.

Можно заметить закономерность, которой подчиняются эти числа: *каждое число, начиная с третьего, равно сумме двух предыдущих*. Посмотрите, как, например, образовалось поголовье кроликов в VII месяце: оно сложилось из пар кроликов в VI месяце (их было 8) и вновь родившихся пар (их оказалось 5 — ровно столько, сколько пар было двумя месяцами раньше). Поняв это, нетрудно продолжить подсчёты:

Месяц	Число пар кроликов
VIII	$13 + 8 = 21$
IX	$21 + 13 = 34$
X	$34 + 21 = 55$
XI	$55 + 34 = 89$
XII	$89 + 55 = 144$

И ответ на вопрос задачи — 144 пары.

Числовую последовательность

1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55; 89; 144; ... ,

возникающую при решении задачи о кроликах, стали называть *последовательностью Фибоначчи*, а составляющие её числа — *числами Фибоначчи*.

ТЕРМИНЫ И СИМВОЛЫ Числа, образующие последовательность, называют *членами последовательности*; число, стоящее на первом месте, называют *первым членом*, на втором — *вторым членом*, на сотом — *сотым членом*, на месте с номером n — n -м членом.



Леонардо Фибоначчи (т.е. сын Боначчи) — так называли Леонардо Пизанского, выдающегося итальянского математика (1180–1240). Его творчество оказало решающее влияние на развитие алгебры и теории чисел, в частности на исследования таких математиков, как Франсуа Виет и Пьер Ферма. Главный труд Л. Фибоначчи — «Книга абака» (1202). Там он первым дал систематическое изложение открытий арабских математиков, чем способствовал знакомству с ними в Западной Европе.

Способы задания последовательностей:

- формулой n -го члена;
- рекуррентной формулой;
- словесным описанием.

Часто одну и ту же последовательность можно задать разными способами.

Слово «рекуррентный» происходит от латинского *recurro* (возвращаться). И название «рекуррентный способ» (т.е. возвратный) говорит о сути такого задания последовательности: чтобы найти очередной член последовательности, надо *вернуться* к предыдущим членам и использовать их значения. Впервые *возвратная последовательность* была описана в труде Л. Фибоначчи «Книга абака».

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Приведите примеры конечных и бесконечных числовых последовательностей.
- Как строится последовательность Фибоначчи? Запишите первые двенадцать чисел Фибоначчи.
- Задайте двумя способами (формулой n -го члена и рекуррентным способом) последовательность: а) чётных чисел; б) нечётных чисел.
- В чём преимущество задания последовательностей формулой n -го члена перед рекуррентным способом? Поясните на примере.

Обозначают члены последовательности буквами с индексами, указывающими на порядковый номер члена, например: $a_1; a_2; a_3; a_4; \dots; a_{100}; \dots a_n; \dots$.

Член последовательности, следующий за членом с номером n , обозначают символом a_{n+1} , а член, предшествующий a_n — символом a_{n-1} . Саму последовательность принято обозначать так: (a_n) .

ЗАДАНИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ Задать последовательность — это значит указать правило, позволяющее найти любой её член. Такое правило может быть предъявлено разными способами.

Наиболее удобным является задание последовательности *формулой n -го члена*. Например:

последовательность натуральных чисел, кратных 5, можно задать формулой $a_n = 5n$;

последовательность квадратов натуральных чисел можно задать формулой $a_n = n^2$.

Чтобы найти какой-либо член последовательности, заданной формулой n -го члена, достаточно подставить в эту формулу вместо n номер этого члена и вычислить значение получившегося выражения.

Пример 1. Последовательность (x_n) задана формулой $x_n = \frac{n}{n+1}$. Найдём x_{100} :

$$x_{100} = \frac{100}{100+1} = \frac{100}{101}.$$

Для задания последовательностей используют также *рекуррентный способ*. Обратимся вновь к последовательности Фибоначчи. Первые два её члена равны 1, а каждый член, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих. Если обозначить последовательность символом (a_n) , то правило её построения можно записать так:

$$a_1 = 1, a_2 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad (n \geq 3).$$

Формула $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ — это пример *рекуррентной формулы*. Рекуррентная формула выражает любой член последовательности, начиная с некоторого, через один или несколько предыдущих членов.

При рекуррентном способе задания члены последовательности вычисляются поочерёдно, один за другим.

Пример 2. Последовательность (c_n) задана рекуррентным способом: $c_1 = 1, c_{n+1} = 2c_n + 1, (n \geq 1)$. Найдём c_4 :

$$c_2 = 2c_1 + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3;$$

$$c_3 = 2c_2 + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7;$$

$$c_4 = 2c_3 + 1 = 2 \cdot 7 + 1 = 15.$$

Ещё один из способов задания последовательностей — *описательный*. Вот пример такого задания: последовательность простых чисел, взятых в порядке возрастания. Заметим, что в данном случае словесное описание — единственно возможный способ задания.

УПРАЖНЕНИЯ

РАЗБИРАЕМ ПРИМЕРЫ ЧИСЛОВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

338

Запишите первые несколько членов:

- последовательности чисел, кратных 3;
- последовательности чисел, противоположных членам натурального ряда;
- последовательности чисел, обратных членам натурального ряда;
- последовательности кубов натуральных чисел;
- последовательности степеней числа 2 с натуральными показателями;
- последовательности правильных дробей, у которых знаменатель на 1 больше числителя.

В каждом случае укажите число, которое стоит в последовательности на 10-м месте, на 45-м месте, на n -м месте.

339

Запишите первые несколько членов указанной последовательности. Конечной или бесконечной она является? Если это конечная последовательность, назовите последнее содержащееся в ней число:

- последовательность двузначных простых чисел;
- последовательность простых чисел, больших 100;
- последовательность правильных дробей со знаменателем 1000;
- последовательность десятичных приближений по недостатку числа $\sqrt{2}$.

340

Какое число стоит на 10-м месте:

- в последовательности остатков от деления на 4 членов натурального ряда;
- в последовательности десятичных приближений по недостатку числа $\frac{1}{7}$ с точностью до 0,1; 0,01; 0,001 и т.д.?

ОСВАИВАЕМ ТЕРМИНЫ И СИМВОЛЫ

341

Пусть (c_n) — последовательность правильных несократимых дробей со знаменателем 40.

- Закончите равенства: $c_5 = \dots$, $c_8 = \dots$, $c_{10} = \dots$.
- Укажите номер члена последовательности, равного $\frac{13}{40}$, $\frac{17}{40}$, $\frac{33}{40}$.
- Найдите последний член этой последовательности и укажите его номер.

342

Пусть (x_n) — последовательность, в которой все члены с нечётными номерами равны 0, а с чётными — 1. Найдите x_{12} , x_{25} , x_{133} , x_{998} , x_{2k} , x_{2k-1} (k — натуральное число).

343

Дана последовательность (z_n) . Какой член последовательности:

- следует за z_{20} , z_{199} , z_n , z_{n-1} , z_{n+3} , z_{2n} ;
- предшествует z_{80} , z_{201} , z_n , z_{n-1} , z_{n+3} , z_{2n} ?

344

Сколько членов последовательности (a_n) содержится между двумя данными её членами? Выпишите подряд их все:

- a_{25} ; ...; a_{32} ; б) a_n ; ...; a_{n+4} ; в) a_{n-5} ; ...; a_n ; г) a_{n-2} ; ...; a_{n+3} .

РАБОТАЕМ С ФОРМУЛОЙ n -ГО ЧЛЕНА

345

Вычислите первые шесть членов последовательности (a_n) , заданной формулой n -го члена, и дайте ей «имя»:

а) $a_n = n$; б) $a_n = 2n - 1$; в) $a_n = 4n$; г) $a_n = 1 - n$.

Образец. $a_n = 2n$; 2; 4; 6; 8; 10; ... — это последовательность чётных чисел.

346

Определите правило, по которому строится последовательность (c_n) , запишите следующие два числа и задайте последовательность формулой n -го члена. Найдите по формуле c_{10} и c_{20} .

а) 3; 6; 9; 12; 15; ...; в) $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \dots$; д) $\frac{2}{1}; \frac{3}{2}; \frac{4}{3}; \frac{5}{4}; \frac{6}{5}; \dots$;

б) 1; 4; 9; 16; 25; ...; г) $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{5}{6}; \dots$; е) $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \frac{1}{32}; \dots$.

347

Последовательность (a_n) задана формулой $a_n = 3n - 15$.

Найдите: а) все члены с a_1 по a_8 ; б) a_{50} ; в) a_{101} ; г) a_k ; д) a_{k+1} .

348

Последовательность (b_n) задана формулой $b_n = 0,1 \cdot 2^{n-1}$.

Найдите: а) все члены с b_1 по b_7 ; б) b_{10} ; в) b_{11} ; г) b_{k-1} ; д) b_{k+2} .

349

Последовательность (x_n) задана формулой n -го члена: $x_n = n^2 - n$.

а) Найдите x_{10} ; x_{15} ; x_k ; x_{k+1} .

б) Каким членом этой последовательности является число 56? число 110?

350

Вычислите первые восемь членов последовательности (b_n) , заданной формулой n -го члена: а) $b_n = \frac{n-1}{n+1}$; б) $b_n = \frac{n+2}{n+1}$. В каждом случае ответьте на вопросы:

1) Как меняются члены последовательности с ростом номера n — увеличиваются или уменьшаются?

2) Есть ли среди членов последовательности число 1?

351

Последовательность (z_n) задана формулой $z_n = n - \frac{1}{n}$. Выпишите все члены этой последовательности, меньшие 10. Сколько таких членов?

Неверно!

Катя, Зоя и Таня отвечали на вопрос: сколько членов последовательности (x_n) , заданной формулой $x_n = \frac{15}{n+3}$, больше 1? Вот их ответы: Катя — 12 членов; Зоя — 11 членов; Таня — 10 членов. Есть ли среди этих ответов верный?

352

Последовательность (y_n) задана формулой $y_n = 3^{n-5}$.

1) Выпишите все члены этой последовательности, большие 0,1 и меньшие 10. Укажите номера этих членов.

2) Найдите отношения: $\frac{y_{10}}{y_9}$, $\frac{y_{100}}{y_{99}}$, $\frac{y_{k+1}}{y_k}$. Сделайте вывод.

353

Найдите первые шесть членов последовательности и опишите её словами:

а) $b_n = (-1)^n$; б) $x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{10}$; в) $y_n = (-1)^{n+1} + 1$; г) $a_n = (-1)^n \cdot n$.

РАБОТАЕМ С РЕКУРРЕНТНОЙ ФОРМУЛОЙ

354

Выпишите первые шесть членов последовательности (a_n) , если:

- а) $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + 1$; г) $a_1 = 1000, a_{n+1} = 0,1a_n$;
 б) $a_1 = 10, a_{n+1} = a_n - 5$; д) $a_1 = 8, a_{n+1} = -0,5a_n$;
 в) $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n$; е) $a_1 = -10, a_{n+1} = \frac{1}{a_n}$.

355

Определите правило, по которому строится последовательность, запишите следующие два члена и задайте её рекуррентным способом:

- а) (a_n) : 64; 60; 56; 52; 48; ...; в) (x_n) : 1; 3; 9; 27; 81; ...;
 б) (c_n) : 3; 8; 13; 18; 23; ...; г) (b_n) : 500; 50; 5; 0,5; 0,05; ...

356

Запишите первые десять членов последовательности (c_n) , если:

- а) $c_1 = 0, c_2 = 4, c_n = \frac{c_{n-1} + c_{n-2}}{2} (n \geq 3)$; б) $c_1 = 1, c_2 = 2, c_n = \frac{c_{n-1}}{c_{n-2}} (n \geq 3)$.

ИЗОБРАЖАЕМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ

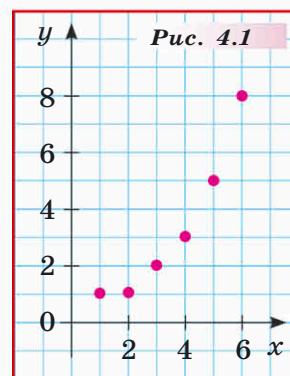
357

1) Члены последовательности можно изображать точками на координатной плоскости: каждому члену соответствует точка, абсцисса которой равна его номеру, а ордината — значению этого члена. На рисунке 4.1 на координатной плоскости изображены первые шесть членов последовательности Фибоначчи: 1; 1; 2; 3; 5; 8. Им соответствуют точки: (1; 1), (2; 1), (3; 2), (4; 3), (5; 5), (6; 8). Назовите координаты точек, изображающих седьмой и восьмой члены этой последовательности.

2) Изобразите точками на координатной плоскости первые шесть членов последовательности (a_n) , если:

- а) $a_n = n - 4$; в) $a_n = \frac{12}{n}$;
 б) $a_n = \frac{n}{2}$; г) $a_n = 0,5n^2 - 8$.

В каждом случае скажите, на какой линии располагаются построенные точки; проведите тонко эту линию.



358

На рисунке 4.2 (а; б) изображены точками первые семь членов последовательности (a_n) . Запишите эти члены последовательности в порядке возрастания их номеров. Задайте последовательность (a_n) рекуррентным способом.

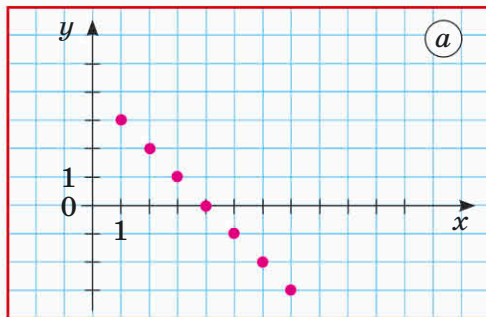
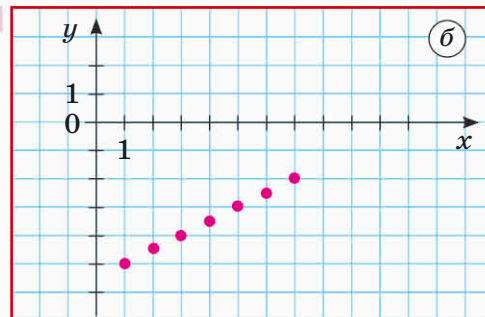


Рис. 4.2



359

Последовательность (c_n) задана формулой $c_n = n^2 - 6n + 5$. Найдите все члены последовательности, которые изображаются на координатной плоскости точками, расположенными ниже прямой $y = 12$. Постройте эти точки.

4.2

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Какую числовую последовательность называют арифметической прогрессией.
- Характеристическое свойство арифметической прогрессии.
- Формулу n -го члена арифметической прогрессии.
- Особенность геометрического изображения арифметической прогрессии.

С закономерностью, по которой строится арифметическая прогрессия, люди были знакомы с глубокой древности. Примеры задач на арифметическую прогрессию содержатся в египетских папирусах и вавилонских клинописных табличках, относящихся ко II тыс. до н.э. Какие-либо теоретические сведения в них не приводятся, лишь даются указания на то, какие действия надо выполнить для получения ответа.

Буква d , которой принято обозначать разность арифметической прогрессии, — это первая буква французского слова *difference*, которое как раз и означает «разность».

АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

Среди числовых последовательностей, которые можно задать рекуррентным способом, самыми простыми являются арифметическая и геометрическая прогрессии. С прогрессиями человек встречается очень часто, поэтому познакомимся с ними более детально.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ АРИФМЕТИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ Рассмотрим такую ситуацию. На турбазе можно взять напрокат лодку. За первый час проката надо заплатить 100 р., а за каждый следующий (полный или неполный) — 50 р. Подсчитывая стоимость проката лодки (в рублях), взятой на один час, на два часа, на три часа и т.д., мы получаем такую последовательность:

100; 150; 200; 250; 300; ...

Каждый следующий её член получается прибавлением к предыдущему члену одного и того же числа, равного 50. Для последовательностей, обладающих подобным свойством, есть специальное название — *арифметическая прогрессия*.



Арифметической прогрессией называется последовательность, каждый член которой, начиная со второго, получается прибавлением к предыдущему члену одного и того же числа.

Таким образом, арифметическая прогрессия определяется рекуррентным соотношением $a_{n+1} = a_n + d$, где d — некоторое число.

Отсюда следует, что при любом натуральном n

$$a_{n+1} - a_n = d.$$

Иными словами, разность между любым членом прогрессии, начиная со второго, и предыдущим членом всегда одна и та же и равна d . Число d называют *разностью арифметической прогрессии*.

Последовательность 100; 150; 200; 250; 300; ..., рассмотренная выше, — это арифметическая прогрессия, в которой $a_1 = 100$ и $d = 50$. Приведём другие примеры арифметических прогрессий.

Простейшая арифметическая прогрессия — натуральный ряд 1; 2; 3; ... В этой прогрессии $a_1 = 1$ и $d = 1$. Арифметической прогрессией является также последовательность натуральных чётных чисел 2; 4; 6; ...; в ней $a_1 = 2$ и $d = 2$. И последовательность натуральных нечётных чисел 1; 3; 5; ... — тоже арифметическая прогрессия; в этом случае $a_1 = 1$, $d = 2$.

А вот пример арифметической прогрессии другого рода: 100; 90; 80; 70; 60; ... Здесь $a_1 = 100$, а $d = 90 - 100 = -10$, т.е. d — число отрицательное.

Интересно, что и такая последовательность, как 5; 5; 5; 5; ..., все члены которой равны между собой, тоже является арифметической прогрессией. Её разность равна 0: $d = 5 - 5 = 0$.



Разность арифметической прогрессии может быть любым числом — положительным, отрицательным и даже нулём. Если $d > 0$, то каждый следующий член прогрессии больше предыдущего. Такую прогрессию называют *возрастающей*. Если $d < 0$, то каждый следующий член меньше предыдущего. Такую прогрессию называют *убывающей*. А прогрессию, в которой $d = 0$, называют *постоянной*.

Термин «прогрессия» произошёл от латинского слова *progression*, означающего «движение вперёд». Члены арифметической прогрессии при положительном d как бы «прирастают» одним и тем же числом, т.е. прогрессируют. Однако число это может быть не только положительным, но и отрицательным, и даже нулём. И арифметическая прогрессия может «идти вспять», а в особых случаях даже «стоять на месте». Но во всех случаях принято использовать общий термин — прогрессия.

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ СВОЙСТВО АРИФМЕТИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ

Возьмём в качестве примера арифметической прогрессии последовательность натуральных чисел, которые при делении на 4 дают в остатке 2. Запишем несколько первых её членов:

2; 6; 10; 14; 18; 22; 26; ...

Можно заметить, что каждое из этих чисел, начиная со второго, равно полусумме двух соседних:

$$6 = \frac{2 + 10}{2}, 10 = \frac{6 + 14}{2}, 14 = \frac{10 + 18}{2}, \dots$$

Этот пример иллюстрирует следующее утверждение: *в арифметической прогрессии каждый член, начиная со второго, есть среднее арифметическое двух соседних членов.*

Докажем это. Пусть (a_n) — арифметическая прогрессия; a_{n-1} , a_n , a_{n+1} ($n \geq 2$) — три последовательных её члена. Так как разность между соседними членами прогрессии одна и та же, то

$$a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n.$$

Из этого равенства получаем:

$$a_n + a_n = a_{n+1} + a_{n-1}, \text{ т.е.}$$

$$2a_n = a_{n+1} + a_{n-1},$$

$$a_n = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}.$$

Верно и обратное: *если в последовательности каждый член, начиная со второго, есть среднее арифметическое двух соседних членов, то эта последовательность — арифметическая прогрессия.*

Для доказательства достаточно провести те же выкладки, но выполнить их в обратном порядке. Таким образом,



последовательность является арифметической прогрессией в том и только том случае, когда каждый её член, начиная со второго, есть среднее арифметическое двух соседних членов.

Именно благодаря рассмотренному свойству прогрессию, которая задаётся формулой $a_{n+1} = a_n + d$, называют *арифметической*. Это свойство иногда называют *характеристическим свойством* арифметической прогрессии, подчёркивая тем самым принципиальную, отличительную особенность этой разновидности числовых последовательностей.

Задача. Последовательность (a_n) — арифметическая прогрессия, в которой $a_3 = 3$ и $a_{13} = 6$. Требуется записать формулу её n -го члена.

Решение. Выразим a_3 и a_{13} через a_1 и d и составим систему уравнений

$$\begin{cases} a_1 + 2d = 3, \\ a_1 + 12d = 6. \end{cases}$$

Решив её, найдём:

$$a_1 = 2,4, \quad d = 0,3.$$

Тогда $a_n = 2,4 + 0,3(n - 1)$,
т.е. $a_n = 0,3n + 2,1$.

Чтобы задать прогрессию, достаточно указать любые два её члена.

Пусть последовательность (a_n) — арифметическая прогрессия. Тогда для любых натуральных значений m и n верно равенство

$$a_n = a_m + d(n - m).$$

Например:

$$a_{10} = a_4 + 6d; \quad a_8 = a_{12} - 4d.$$

(Докажите это свойство!)

ФОРМУЛА n -ГО ЧЛЕНА АРИФМЕТИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ

Вернёмся к разговору о стоимости проката лодки (с. 134). Допустим, группа туристов хочет взять лодку на двое суток. Какова будет стоимость проката?

Чтобы ответить на этот вопрос, можно, конечно, как и прежде, последовательно прибавлять к уже найденным суммам по 50 р., пока не получим стоимость 48 часов проката лодки. Но это процесс долгий. Поэтому поступим иначе: составим формулу n -го члена арифметической прогрессии 100; 150; 200; ..., которая позволит вычислить стоимость проката непосредственно по количеству часов, на которое взята лодка.

Обозначим арифметическую прогрессию 100; 150; 200; 250; ... символом (P_n) . Тогда

$$P_2 = 100 + 50,$$

$$P_3 = (100 + 50) + 50 = 100 + 50 \cdot 2,$$

$$P_4 = (100 + 50 \cdot 2) + 50 = 100 + 50 \cdot 3,$$

$$P_5 = (100 + 50 \cdot 3) + 50 = 100 + 50 \cdot 4.$$

Обратите внимание: в составленных выражениях второе слагаемое получается умножением разности прогрессии на номер члена, уменьшенный на 1. Очевидна закономерность:

$$P_n = 100 + 50(n - 1).$$

Это равенство — формула n -го члена арифметической прогрессии (P_n) .

Подставив в формулу $n = 48$, найдём плату за 48 часов проката лодки:

$$P_{48} = 100 + 50(48 - 1) = 100 + 50 \cdot 47 = 2450 \text{ (р.)}.$$

Рассуждая точно так же, легко получить формулу n -го члена произвольной арифметической прогрессии. Пусть последовательность (a_n) — арифметическая прогрессия. Тогда, по определению,

$$a_2 = a_1 + d;$$

$$a_3 = (a_1 + d) + d = a_1 + d \cdot 2;$$

$$a_4 = (a_1 + 2d) + d = a_1 + d \cdot 3;$$

$$a_5 = (a_1 + 3d) + d = a_1 + d \cdot 4.$$

Понятно, что $a_6 = a_1 + d \cdot 5$, $a_{25} = a_1 + d \cdot 24$,
 $a_{100} = a_1 + d \cdot 99$. И вообще

$$a_n = a_1 + d(n - 1).$$

Это равенство и является формулой n -го члена арифметической прогрессии, первый член которой равен a_1 , а разность равна d .

Приведём примеры решения задач с использованием этой формулы.

Пример 1. Найдём 157-й член арифметической прогрессии

$$120; 116; 112; 108; 104; \dots$$

Имеем $a_1 = 120$, $d = 116 - 120 = -4$, $n = 157$. Подставив в формулу $a_n = a_1 + d(n - 1)$ значения a_1 , d и n , получим

$$a_{157} = 120 - 4(157 - 1) = -504.$$

Пример 2. Дана арифметическая прогрессия 1; 4; 7; 10; 13; 16; Каков номер члена прогрессии, равно-го 1249?

Подставим $a_1 = 1$, $d = 3$, $a_n = 1249$ в формулу $a_n = a_1 + d(n - 1)$. Получим уравнение с переменной n :

$$1249 = 1 + 3(n - 1).$$

Решив его, найдём искомый номер:

$$3(n - 1) = 1248,$$

$$n - 1 = 416,$$

$$n = 417.$$

Значит, число 1249 — 417-й член прогрессии.

Пример 3. Является ли число 250 членом арифметической прогрессии 0; 4,5; 9; 13,5; 18; ... ?

Подставим $a_1 = 0$, $d = 4,5$, $a_n = 250$ в формулу $a_n = a_1 + d(n - 1)$. Получим уравнение

$$250 = 0 + 4,5(n - 1).$$

Решив его, найдём, что $n = 56\frac{5}{9}$. Корень уравнения — число не натуральное. Значит, число 250 не является членом данной арифметической прогрессии.

Рис. 4.3

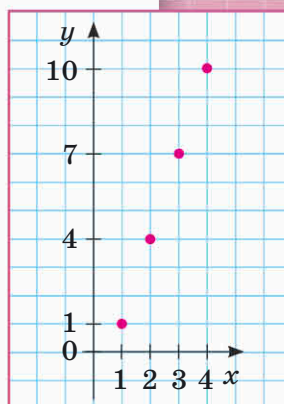
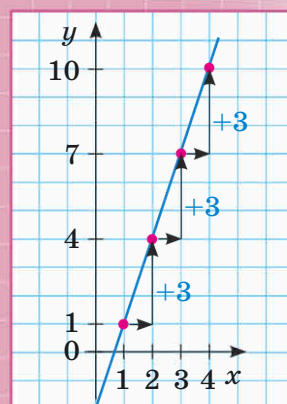


Рис. 4.4



ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ АРИФМЕТИЧЕСКОЙ

ПРОГРЕССИИ

Рассмотрим арифметическую прогрессию (a_n) , в которой $a_1 = 1$ и $d = 3$. Изобразим точки на координатной плоскости несколько первых её членов. Для этого по горизонтальной оси будем откладывать номер члена, а по вертикальной — соответствующий член прогрессии (рис. 4.3). С каждым единичным шагом по горизонтальной оси мы поднимаемся вверх на 3 единицы (рис. 4.4). Мы видим, что все отмеченные точки лежат на одной прямой. Можно предположить, что если продолжить строить точки, изображающие члены прогрессии, то они окажутся на той же прямой.

Чтобы проверить это, запишем формулу n -го члена данной прогрессии и упростим её правую часть:

$$a_n = 1 + 3(n - 1), \quad a_n = 3n - 2.$$

Зависимость члена прогрессии от номера n является линейной. А это как раз и означает, что наше предположение верно. Прямая, на которой располагаются точки, изображающие члены прогрессии, — это график линейной функции $y = 3x - 2$; её угловый коэффициент — число 3, т.е. он равен разности прогрессии.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

1) Сформулируйте определение арифметической прогрессии и приведите примеры.

2) Запишите в виде рекуррентной формулы правило, по которому строится арифметическая прогрессия.

Арифметическая прогрессия начинается так:

а) 1,5; 2,7; ... ; б) 15; 11;

Найдите её разность и запишите следующие три члена.

1) Запишите формулу n -го члена арифметической прогрессии (a_n) .

2) Запишите выражения для a_8 ; a_{k+1} ; a_{k-2} ; a_{2k} .

3) Найдите a_{16} , если $a_1 = 45$, $d = -3$.



Установленное на примере свойство справедливо для любой арифметической прогрессии: точки, изображающие члены прогрессии на координатной плоскости, располагаются на одной и той же прямой, угловый коэффициент которой равен разности прогрессии d .

УПРАЖНЕНИЯ

ПРИМЕНЯЕМ ОПРЕДЕЛЕНИЕ АРИФМЕТИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ

360

Запишите первые семь членов арифметической прогрессии (a_n) , если:

- а)
- $a_1 = 10$
- ,
- $d = 3$
- ; б)
- $a_1 = 30$
- ,
- $d = -10$
- ; в)
- $a_1 = -35$
- ,
- $d = 6$
- .

361

Найдите разность и следующие пять членов арифметической прогрессии:

- а) 0; 4; 8; 12; ...; б) 0; -3; -6; -9; ...; в) -7,5; -6; -4,5; -3; ...

362

Одна из последовательностей — арифметическая прогрессия. Укажите её:

- 1) 1; 2; 3; 5; 8; ...; 2) 16; 13; 10; 7; ...; 3) 32; 16; 8; 4; ...

363

В арифметической прогрессии (a_n) , разность которой равна 12, известен восьмой член: $a_8 = 54$. Восстановите начало прогрессии. Начиная с какого номера члены этой прогрессии положительны? Сколько в ней отрицательных членов?

364

Найдите члены последовательности (a_n) , обозначенные буквами, если известно, что эта последовательность — арифметическая прогрессия:

- а)
- a_1
- ; 12;
- a_3
- ; 18;
- a_5
- ;
- a_6
- ; ...; б)
- a
- ;
- a_2
- ; 70;
- a_4
- ; 62; ...;
- a_7
- ; ...

Неверно!

Последовательности (x_n) , (y_n) , (z_n) и (u_n) заданы рекуррентным способом:

$$x_1 = 5, x_{n+1} = x_n \cdot 4; \quad z_1 = 5, z_{n+1} = z_n - 4;$$

$$y_1 = 5, y_{n+1} = y_n + 4; \quad u_1 = 5, u_{n+1} = u_n.$$

Какие из них арифметические прогрессии?

Вот ответы некоторых учеников:

- 1)
- (x_n)
- и
- (y_n)
- ; 2)
- (y_n)
- ,
- (z_n)
- и
- (u_n)
- ; 3)
- (y_n)
- и
- (z_n)
- ; 4) только
- (y_n)
- .

Есть ли среди этих ответов верный?

ВЫЧИСЛЯЕМ ПО ФОРМУЛЕ n -ГО ЧЛЕНА

365

Последовательность (c_n) — арифметическая прогрессия. Запишите формулу n -го члена и найдите:

- а)
- c_{15}
- , если
- $c_1 = 3$
- и
- $d = -0,5$
- ; б)
- c_{21}
- , если
- $c_1 = 5,8$
- и
- $d = -1,5$
- ;
-
- в)
- c_{11}
- , если
- $c_1 = -3$
- и
- $d = 0,7$
- ; г)
- c_{26}
- , если
- $c_1 = -7$
- и
- $d = 0,4$
- .

366

Последовательность (a_n) — арифметическая прогрессия. Чему равна её разность? Запишите формулу n -го члена этой прогрессии и найдите:

- а)
- a_{41}
- , если
- $a_1 = 12$
- ;
- $a_{n+1} = a_n - 5$
- ; б)
- a_{36}
- , если
- $a_1 = -3$
- ,
- $a_{n+1} = a_n + 5$
- .

367

Последовательность (a_n) — арифметическая прогрессия. Найдите d , если:

- а)
- $a_1 = 11$
- ,
- $a_{20} = 20,5$
- ; б)
- $a_1 = 90$
- ,
- $a_{36} = -15$
- .

368

Найдите первый член арифметической прогрессии (x_n) , если:

- а)
- $x_{30} = 128$
- ,
- $d = 4$
- ; б)
- $x_{45} = -208$
- ,
- $d = -7$
- .

369

Дана арифметическая прогрессия: -12; -10,5; -9; -7,5; Какой номер имеет член прогрессии, равный: а) 48; б) 82,5?

370

Фигуры составлены из квадратов, как показано на рисунке 4.5. Сколько квадратов должно быть в фигуре под номером 40, если эта закономерность сохранится?



Рис. 4.5

371

Является ли членом арифметической прогрессии 1; 8; 15; 22; ... число 88? число 99? Если является, то укажите его номер.

372

- Между числами 6 и 30 вставьте пять чисел так, чтобы вместе с данными числами они образовывали арифметическую прогрессию.
- Между числами -7 и 23 вставьте три числа так, чтобы они вместе с данными числами образовывали арифметическую прогрессию.

ИЗОБРАЖАЕМ ПРОГРЕССИЮ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ

373

Первые шесть членов арифметической прогрессии (a_n) изображены точками на координатной плоскости (рис. 4.6, а, б). Найдите a_1 и d . Запишите уравнение линии, на которой лежат отмеченные точки.

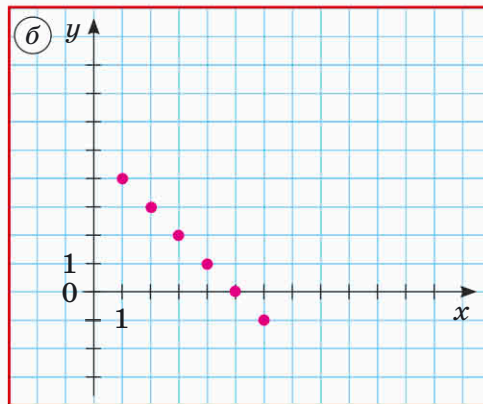
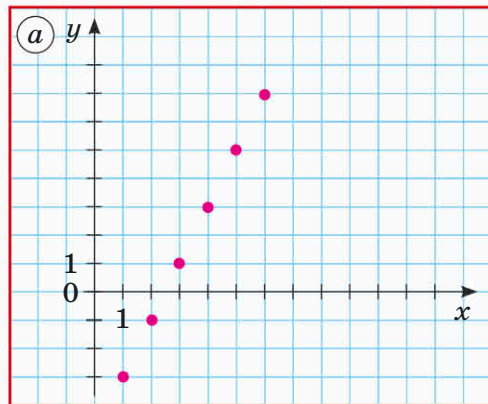


Рис. 4.6

МАТЕМАТИКА ВОКРУГ НАС (№ 374, 375)

374

Самолёт начал снижение на высоте 8000 м и первые десять минут снижался на 500 м в минуту.

- Запишите формулу для вычисления высоты h_n , на которой окажется самолёт через n минут после начала снижения.
- На какой высоте будет самолёт через 7 мин после начала снижения?
- На какой минуте самолёт окажется ниже 3000 м над уровнем земли?
- Изобразите точками на координатной плоскости первые десять членов последовательности (h_n) .

375

В школе-новостройке сейчас учатся 200 учеников. Допустим, что каждый год число учащихся будет увеличиваться на 20 человек.

- Запишите формулу для вычисления числа учащихся в школе через n лет.
- Школа рассчитана на обучение 340 учащихся. Через сколько лет будет достигнута норма?
- Покажите на столбчатой диаграмме прирост числа учащихся в течение пяти лет.

4.3

ВЫ УЗНАЕТЕ:

● Формулы для вычисления суммы первых n членов арифметической прогрессии.



Карл Фридрих Гаусс

1777–1825

Немецкий математик, астроном, физик.

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ —}$$

сумма первых n натуральных чисел;

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2 \text{ —}$$

сумма первых n натуральных нечётных чисел;

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1) \text{ —}$$

сумма первых n натуральных чётных чисел.

(Докажите эти равенства!)

СУММА ПЕРВЫХ n ЧЛЕНОВ АРИФМЕТИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ

Знаменитый немецкий математик К. Гаусс в детстве на уроке математики поразил учителя тем, что очень быстро сложил натуральные числа от 1 до 100. Он записал только ответ — число 5050, выполнив все вычисления в уме. По сути, Гаусс нашёл сумму первых ста членов арифметической прогрессии 1, 2, 3, 4, ... без непосредственного их суммирования. Как же можно быстро вычислить сумму натуральных чисел от 1 до 100? И есть ли какой-то удобный способ суммирования членов любой арифметической прогрессии?

Вывод формулы суммы Известно, как именно считал Гаусс, но возможно, он воспользовался приёмом, похожим на тот, что описан ниже. Чтобы вычислить сумму $1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100$, запишем её дважды, причём во второй раз в обратном порядке, расположив слагаемые друг под другом:

$$\begin{array}{r} 1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100 \\ + \\ 100 + 99 + 98 + \dots + 3 + 2 + 1 \\ \hline 101 + 101 + 101 + \dots + 101 + 101 + 101 \end{array}$$

100 раз

Произведение $101 \cdot 100$ даёт нам удвоенную сумму всех натуральных чисел от 1 до 100. Поэтому сама эта сумма равна $\frac{101 \cdot 100}{2} = 5050$.

Применим тот же способ рассуждения к произвольной арифметической прогрессии (a_n) :

$$a_1; a_2; a_3; \dots; a_n; \dots$$

Обозначим сумму первых n её членов символом S_n :

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n.$$

Запишем сумму дважды. В первой строке начнём с a_1 и будем получать каждый следующий член прибавлением разности d ; во второй строке начнём с a_n и будем получать следующие члены вычитанием разности d :

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + (a_1 + (n-1) \cdot d)$$

$$+ S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \dots + (a_n - (n-1) \cdot d)$$

Каждая пара чисел, расположенных друг под другом, в сумме даёт $a_1 + a_n$. Всего таких пар n . Сложив записанные равенства, получим

$$2S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n)}_{n \text{ раз}}$$

Отсюда $2S_n = (a_1 + a_n)n$, т.е. $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$.

Мы получили формулу суммы первых n членов арифметической прогрессии:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}. \quad (1)$$

Формулу суммы можно записать и в другом виде, выразив a_n через a_1 и d :

$$S_n = \frac{(a_1 + a_1 + d(n-1))n}{2} = \frac{(2a_1 + d(n-1))n}{2}.$$

Таким образом,

$$S_n = \frac{(2a_1 + d(n-1))n}{2}. \quad (2)$$

Вычислять сумму по формуле (1) удобно в том случае, когда известны первый и последний из суммируемых членов, а по формуле (2) — когда мы знаем первый член и разность прогрессии.

ВЫЧИСЛЕНИЕ СУММ ПО ФОРМУЛАМ

Пример. Найдём сумму первых сорока членов арифметической прогрессии 3,5; 5,2;

В этой прогрессии $a_1 = 3,5$ и $d = 5,2 - 3,5 = 1,7$. Вычислим S_{40} двумя способами.

Способ 1. Найдём a_{40} и затем воспользуемся формулой (1):

$$a_{40} = 3,5 + 1,7 \cdot 39 = 69,8; S_{40} = \frac{(3,5 + 69,8) \cdot 40}{2} = 1466.$$

Способ 2. Воспользуемся формулой (2). Подставив в эту формулу $a_1 = 3,5$, $d = 1,7$ и $n = 40$, получим

$$S_{40} = \frac{(2 \cdot 3,5 + 1,7 \cdot 39) \cdot 40}{2} = 1466.$$

МАТЕМАТИКА ВОКРУГ НАС

Задача. Поезд, отходя от станции, равномерно увеличивает скорость так, что десятую минуту он идёт со средней скоростью $v_{\text{ср}} = 30$ км/ч. Какое расстояние пройдёт поезд за первые 10 минут?

Решение. Расстояния $s_1, s_2, s_3, \dots, s_{10}$ (в километрах), которые проходит поезд за 1-ю, 2-ю и т.д. минуты движения, образуют арифметическую прогрессию. Её разность d численно равна ускорению движения поезда.

Так как в начальной момент движения скорость поезда равнялась нулю, то в первую минуту он прошёл расстояние, равное разности прогрессии, т.е. $s_1 = d$.

Можно узнать также и s_{10} . Так как $s_{10} = v_{\text{ср}} \cdot 1$ мин, а $v_{\text{ср}} = 30$ км/ч = 0,5 км/мин, то $s_{10} = 0,5 \cdot 1 = 0,5$ (км).

Далее из формулы $s_n = s_1 + d(n-1)$ найдём d . Подставив $n = 10$, $s_1 = d$ и $s_{10} = 0,5$, получим

$$0,5 = d + d \cdot 9, \\ d = 0,05.$$

Таким образом, $d = 0,05$, значит, и $s_1 = 0,05$.

Теперь можно вычислить расстояние, которое пройдёт поезд за первые 10 минут, т.е. сумму S_{10} :

$$S_{10} = s_1 + s_2 + \dots + s_{10} = \frac{(0,05 + 0,5) \cdot 10}{2} = 2,75.$$

Ответ: 2 км 750 м.

Найдём сумму всех двузначных чисел, кратных 3.

Решение.

1) 12; 15; 18; ... 99; — арифметическая прогрессия;

$$a_1 = 12, a_n = 99, d = 3.$$

Найдём n :

$$a_n = a_1 + d(n-1), \\ 99 = 12 + 3(n-1), \\ n = 30.$$

2) По формуле (1) найдём S_{30} :

$$S_{30} = \frac{(12 + 99) \cdot 30}{2} = 1665.$$

Ответ: 1665.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

● Запишите формулу суммы первых n членов арифметической прогрессии, у которой известны a_1 , a_n и n .

Вычислите по этой формуле сумму всех чётных натуральных чисел от 2 до 40 включительно.

● Запишите формулу суммы первых n членов арифметической прогрессии, у которой известны a_1 , d и n .

Вычислите по этой формуле сумму первых тридцати натуральных нечётных чисел.

● Как бы вы вычислили сумму первых n членов арифметической прогрессии, разность которой равна 0? Запишите формулу и приведите пример.

УПРАЖНЕНИЯ

ВЫЧИСЛЯЕМ СУММЫ ПО ФОРМУЛАМ

376

Вычислите двумя способами — с помощью формулы (1) и формулы (2) — сумму первых двадцати членов арифметической прогрессии:

а) 1; 5; 9; ...; б) -50; -35; -20; ...; в) 8; 3; -2;

377

Последовательность (x_n) — арифметическая прогрессия. Найдите, пользуясь любой из двух формул:

а) S_{10} , если $x_1 = 38$, $d = -4$; б) S_{64} , если $x_1 = -75$, $d = 3$.

378

Найдите двумя способами сумму:

- а) первых ста натуральных чётных чисел;
б) первых семидесяти натуральных нечётных чисел.

379

Арифметическая прогрессия задана формулой n -го члена $a_n = 4n + 2$.

Найдите: а) S_{10} ; б) S_{20} ; в) S_n .

380

Арифметическая прогрессия (c_n) задана рекуррентным способом:

$c_1 = 1,2$, $c_{n+1} = c_n + 1,5$. Найдите: а) S_{15} ; б) S_{40} ; в) S_n .

РЕШАЕМ ЗАДАЧИ С ПРИМЕНЕНИЕМ ФОРМУЛЫ СУММЫ

381

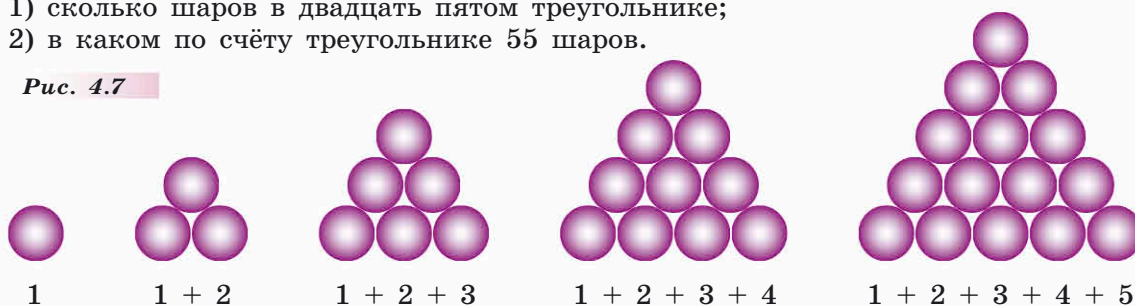
- 1) Найдите сумму первых шестидесяти натуральных чисел.
- 2) Определите, сколько последовательных натуральных чисел, начиная с 1, надо сложить, чтобы в сумме получить 210.

382

Треугольные числа изображают в виде треугольников, составленных из шаров (рис. 4.7). Определите:

- 1) сколько шаров в двадцать пятом треугольнике;
- 2) в каком по счёту треугольнике 55 шаров.

Рис. 4.7



383

Арифметическая прогрессия (a_n) задана формулой n -го члена $a_n = 10 - 4n$. Составьте формулу для вычисления суммы первых n членов этой прогрессии. Пользуясь этой формулой:

- 1) найдите сумму первых тридцати членов прогрессии (a_n) ;
- 2) выясните, сколько членов прогрессии (a_n) , начиная с первого, сложили, если сумма оказалась равной -120.

384

Найдите сумму:

- а) натуральных чисел от 45 до 90; в) чётных чисел от 30 до 98;
б) всех трёхзначных чисел; г) нечётных чисел от 15 до 85.

385

Фигура, изображённая на рисунке 4.8, состоит из столбцов, каждый из которых на 2 единицы выше предыдущего. Основание каждого столбца равно 1.

Рис. 4.8

1) Найдите площадь фигуры (в кв. ед.), если в ней 8 столбцов; 20 столбцов; n столбцов.

2) Сколько всего столбцов в фигуре, если её площадь равна 100 кв. ед.?



386

Найдите сумму всех двузначных чисел, не кратных 5.

МАТЕМАТИКА ВОКРУГ НАС (№ 387–391)

387

В первом ряду лекционной аудитории 20 мест, а в каждом следующем ряду на 4 места больше, чем в предыдущем. В аудитории 16 рядов. Сколько всего мест в аудитории?

388

В амфитеатре концертного зала 15 рядов, и число кресел в каждом ряду увеличивается на 2 по сравнению с предыдущим. В последнем ряду 35 кресел. Сколько всего кресел в амфитеатре?

389

Продолжительность прогулки грудного ребёнка в первый день составляет 20 мин. Затем она увеличивается ежедневно на 10 мин и доводится до 2 ч в день. На какой по счёту день длительность прогулки составит 2 ч, и сколько всего времени за эти дни ребёнок проведёт на воздухе?

390

Игорь начал утренние тренировки в беге с 2 км в день. Он решил каждую неделю увеличивать эту дистанцию в арифметической прогрессии так, чтобы в одиннадцатую неделю пробегать по 4 км в день. На какое расстояние ему надо увеличивать дистанцию еженедельно? Сколько всего километров он пробежит за 11 недель?

391

Премияльный фонд, составляющий 10 000 р., надо разделить между десятью сотрудниками так, чтобы каждый следующий в списке, составленном руководителем, получил на 150 р. больше предыдущего. Как это сделать?

392

ЗАДАЧА-ИССЛЕДОВАНИЕ

Известно, что последовательность (a_n) — арифметическая прогрессия.

1) Возьмём отрезок (часть) этой прогрессии от a_1 до a_{50} :

$$a_1; a_2; a_3; a_4; \dots; a_{48}; a_{49}; a_{50}.$$

Сравните с суммой первого и последнего членов, т.е. с числом $a_1 + a_{50}$, суммы: $a_2 + a_{49}$, $a_4 + a_{47}$, $a_{10} + a_{41}$. Сделайте вывод.

2) Возьмём отрезок прогрессии (a_n) , содержащий n членов:

$$a_1; a_2; a_3; \dots; a_{n-1}; a_n.$$

Докажите, что сумма членов, равноудалённых от концов, равна сумме первого и последнего членов.

Подсказка. Обозначьте члены прогрессии, равноудалённые от a_1 и a_n , через a_k и a_{n-k+1} .

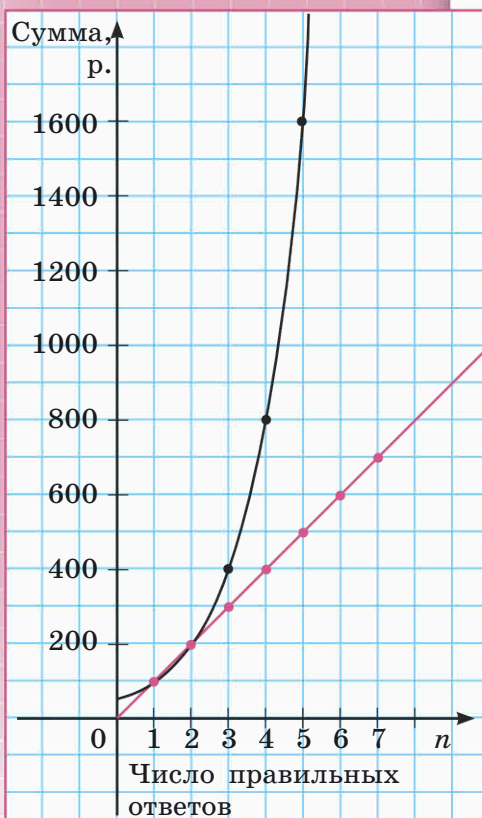
3) Пусть $a_5 + a_{16} = 29,5$. Найдите: $a_1 + a_{20}$; S_{20} .

4.4

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Определение геометрической прогрессии, её свойства.
- Чем геометрическая прогрессия отличается от арифметической.
- Формулу для вычисления любого члена геометрической прогрессии.
- Примеры геометрической прогрессии из жизни.

Рис. 4.9



ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

Ещё один широко распространённый и в математике, и в природе, и в повседневной жизни вид последовательности — геометрическая прогрессия. Она отличается от арифметической прогрессии тем, что каждый следующий её член получается из предыдущего умножением его на одно и то же число, не равное нулю.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ Условия одной из телевизионных игр таковы: за правильный ответ на первый вопрос участник получает 100 р., с каждым следующим верным ответом сумма удваивается. Таким образом, начисляемые игроку суммы (в рублях) образуют такую последовательность: 100; 200; 400; 800; 1600; Это пример геометрической прогрессии: каждый следующий её член равен предыдущему, умноженному на одно и то же число, в данном случае на число 2. Если бы условия игры строились по правилу арифметической прогрессии, например, начальная сумма 100 р. с каждым верным ответом увеличивалась бы ещё на 100 р., то последовательность была бы такой: 100; 200; 300; 400; 500;

Для сравнения изобразим эти последовательности точками на координатной плоскости (рис. 4.9). Точки, соответствующие членам арифметической прогрессии, расположены на прямой, арифметическая прогрессия растёт равномерно, с постоянной скоростью. Скорость роста геометрической прогрессии всё время (с каждым шагом) увеличивается; точки, соответствующие её членам, резко «уходят» вверх. Все они лежат на кривой, носящей красивое название *экспонента*. Чем выше поднимается экспонента, тем она становится круче.

Определение геометрической прогрессии:

геометрической прогрессией называют последовательность, первый член которой отличен от нуля и каждый следующий член, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же не равное нулю число.

Число, на которое умножаются члены прогрессии, называют знаменателем геометрической прогрессии. Его принято обозначать буквой q .

Таким образом, геометрическая прогрессия, так же как и арифметическая, определяется рекуррентным соотношением (только сложение заменяется умножением):

$$b_{n+1} = b_n \cdot q.$$

Из этого равенства получаем: $\frac{b_{n+1}}{b_n} = q$, что выражает следующий очевидный факт:

в геометрической прогрессии отношение любого её члена, начиная со второго, к предыдущему члену является постоянным и равно знаменателю прогрессии.

Приведём примеры геометрических прогрессий.

♦ Пусть $b_1 = 1$ и $q = 2$. Получаем геометрическую прогрессию 1; 2; 4; 8; 16; 32; 64; Каждый член этой прогрессии больше предыдущего, т.е. это *возрастающая* последовательность.

♦ Пусть $b_1 = 81$ и $q = \frac{1}{3}$. Получаем геометрическую прогрессию, которая начинается так: 81; 27; 9; 3; 1; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{9}$; Это *убывающая* последовательность.

♦ Пусть $b_1 = 2$ и $q = -3$. В этом случае знаки у членов прогрессии чередуются, и она имеет вид: 2; -6; 18; -54; 162; -486; Эта геометрическая прогрессия не является ни возрастающей, ни убывающей.

ФОРМУЛА n -ГО ЧЛЕНА ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ

Задача. Удвоение бактерий. Бактерии размножаются делением в геометрической прогрессии. Одна бактерия делится на две; каждая из двух, в свою очередь, тоже делится на две, получается четыре бактерии; из четырёх в результате деления получаются восемь и т.д. Численность G_1 первого поколения бактерий в лабораторном опыте равнялась 1000. Какой будет численность колонии бактерий в десятом поколении?

Будем последовательно вычислять численность колонии бактерий в каждом поколении:

$$G_1 = 1000; G_2 = 1000 \cdot 2; G_3 = (1000 \cdot 2) \cdot 2 = 1000 \cdot 2^2;$$

$$G_4 = (1000 \cdot 2^2) \cdot 2 = 1000 \cdot 2^3; \dots; G_{10} = 1000 \cdot 2^9.$$

Вообще, в n -м поколении будет $G_n = 1000 \cdot 2^{n-1}$ бактерий. Получили формулу n -го члена геометрической прогрессии 1000; $1000 \cdot 2$; $1000 \cdot 2^2$; $1000 \cdot 2^3$; $1000 \cdot 2^4$;

Проведём такие же рассуждения для произвольной геометрической прогрессии. Пусть последовательность (b_n) — геометрическая прогрессия со знаменателем q .

Тогда:

$$b_2 = b_1 \cdot q,$$

$$b_3 = (b_1 \cdot q) \cdot q = b_1 \cdot q^2,$$

$$b_4 = (b_1 \cdot q^2) \cdot q = b_1 \cdot q^3,$$

...

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}.$$

Формула n -го члена геометрической прогрессии с первым членом b_1 и знаменателем q :

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}.$$

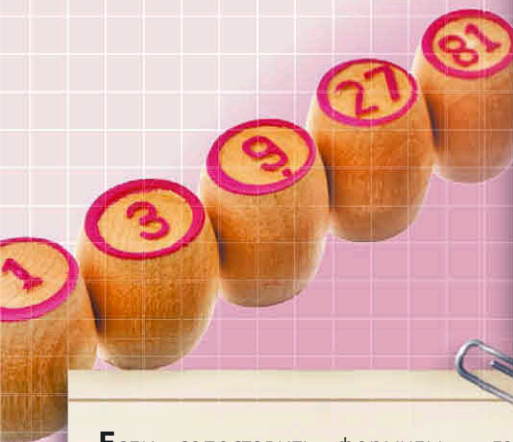
Пример 1. Геометрическая прогрессия (b_n) начинается так: 384; 192; 96; Найдём десятый её член.

Выбор буквы q для обозначения знаменателя геометрической прогрессии объясняется именно свойством, выраженным равенством $\frac{b_{n+1}}{b_n} = q$: q — это первая буква французского слова *quotient*, которое переводится как «частное».

У геометрических прогрессий, которые встречаются в реальной жизни, члены всегда положительны. И если $q > 1$, то такая прогрессия является *возрастающей*; если $0 < q < 1$, то такая прогрессия является *убывающей*.



В формуле n -го члена геометрической прогрессии переменная n содержится в *показателе степени*, поэтому зависимость b_n от n называют *экспоненциальной* (от лат. *exponentis* — показывающий). С этим связано и происхождение названия линии (экспонента), на которой располагаются точки, изображающие геометрическую прогрессию (рис. 4.9).



Если сопоставить формулы n -го члена для арифметической и для геометрической прогрессии, то вы увидите, что вторая формула как бы получена из первой, только сложение заменено умножением, а умножение — возведением в степень:

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + d(n-1), \\ b_n &= b_1 \cdot q^{n-1}. \end{aligned}$$

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

● Какая последовательность называется геометрической прогрессией? Запишите рекуррентное правило, по которому образуются члены геометрической прогрессии. Приведите пример геометрической прогрессии.

● Запишите первые шесть членов геометрической прогрессии (x_n) , которая начинается так: $\frac{1}{125}, \frac{1}{25}, \dots$. Назовите её знаменатель. Чему равно отношение $\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_2}, \frac{x_{n+1}}{x_n}$?

● Запишите формулу n -го члена геометрической прогрессии. Найдите девятый член геометрической прогрессии, в которой $b_1 = 48, q = \frac{1}{2}$.

Имеем $b_1 = 384, q = \frac{192}{384} = \frac{1}{2}$. Подставим в формулу $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ значения $b_1 = 384, q = \frac{1}{2}$ и $n = 10$:

$$b_{10} = 384 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{384}{2^9} = \frac{3 \cdot 128}{2^9} = \frac{3 \cdot 2^7}{2^9} = \frac{3}{4}.$$

Пример 2. Известны первый член и знаменатель геометрической прогрессии: $x_1 = 15, q = 5$. Запишем формулу n -го члена этой прогрессии.

Подставив в формулу $x_n = x_1 \cdot q^{n-1}$ значения x_1 и q , получим $x_n = 15 \cdot 5^{n-1}$.

Эту формулу можно записать в более красивом виде, перейдя от показателя $n-1$ к показателю n :

$$x_n = 15 \cdot 5^{n-1} = \frac{15 \cdot 5^n}{5} = 3 \cdot 5^n, \text{ т. е. } x_n = 3 \cdot 5^n.$$

Пример 3. Докажем, что последовательность (y_n) , заданная формулой $y_n = 2 \cdot 7^n$, является геометрической прогрессией.

Найдём отношение произвольного члена этой последовательности y_k к предыдущему её члену:

$$\frac{y_k}{y_{k-1}} = \frac{2 \cdot 7^k}{2 \cdot 7^{k-1}} = 7^{k-k+1} = 7.$$

Так как отношение $\frac{y_k}{y_{k-1}}$ постоянно, то данная последовательность — геометрическая прогрессия. Её знаменатель равен 7, а первый член y_1 равен $2 \cdot 7 = 14$.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОГРЕССИИ ВОКРУГ НАС

Задача. Рост численности населения. В 2015 г. число жителей нового района составляло 24 тыс. человек. Ежегодно оно увеличивалось в 1,2 раза. Сколько жителей будет в этом районе в 2025 г., если тенденция сохранится?

Если записать число жителей района в каждом году, начиная с 2015 г., то получим геометрическую прогрессию $N_1, N_2, N_3, \dots$. Её первый член равен 24 тыс., а знаменатель равен 1,2. Чтобы узнать, сколько жителей будет в районе в 2025 г., т.е. через 10 лет, нужно вычислить 11-й член этой прогрессии: $N_{11} = 24\,000 \cdot 1,2^{10}$.

Вычислять значение этого выражения следует с помощью калькулятора, и число, появившееся на экране, надо округлить до тысяч:

$$N_{11} = 24\,000 \cdot 1,2^{10} \approx 149\,000.$$

Итак, при сохранении тенденции численность населения в районе составит 149 тыс. человек.



Значение выражения $24\,000 \cdot 1,2^{10}$ найти с помощью калькулятора можно по-разному. Если калькулятор имеет

кнопку $[x^y]$, то нужно выполнить такую последовательность действий: $1,2 [x^y] 10 [\times] 24\,000 [=]$

Если такой кнопки нет, то можно вычислить значение $1,2^{10}$ путём повторных умножений.

УПРАЖНЕНИЯ

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ И ЕЁ СВОЙСТВА

393

Выпишите следующие три члена геометрической прогрессии:

- а) 5; 15; 45; ...; б) 18; 6; 2; ...; в) -100; 10; -1; ...; г) $\frac{1}{48}$; $\frac{1}{12}$; $\frac{1}{3}$;

394

Одна из следующих последовательностей не является геометрической прогрессией. Какая?

- 1) 3; 6; 12; 24; ...; 3) 20; 10; 0; -10; ...;
2) -10; 1; -0,1; 0,01; ...; 4) 162; 54; 18; 6;

395

Выпишите все предыдущие члены геометрической прогрессии со знаменателем -6, если известен её четвёртый член: а) ...; 72; ... ; б) ...; -18;

396

Запишите два предыдущих и два последующих члена геометрической прогрессии, если её знаменатель равен $\frac{1}{5}$: а) ...; 5; ...; б) ...; 10;

397

Найдите первые семь членов геометрической прогрессии:

- а) $b_1 = 4$, $b_{n+1} = 2b_n$; б) $b_1 = -1$, $b_{n+1} = 3b_n$.

398

а) Последовательность задана условиями: $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_{n+1} = x_n \cdot (-2)$. Определите, верно или неверно каждое из следующих утверждений относительно этой последовательности.

- 1) Эта последовательность — геометрическая прогрессия.
- 2) Все члены последовательности — отрицательные числа.
- 3) Второй член последовательности меньше первого.
- 4) Число 2 является членом этой последовательности.
- 5) Это убывающая последовательность.

б) Последовательность задана условиями: $x_1 = -1$, $x_{n+1} = x_n \cdot \frac{1}{2}$. Верно или неверно каждое из следующих утверждений относительно этой последовательности?

- 1) Все члены последовательности — положительные числа.
- 2) Эта последовательность — геометрическая прогрессия.
- 3) Второй член последовательности меньше первого.
- 4) Число $-\frac{1}{6}$ является членом этой последовательности.
- 5) Это возрастающая последовательность.

399

Даны первые четыре члена геометрической прогрессии. Найдите её знаменатель и выпишите следующие три её члена:

- а) 2; $2\sqrt{2}$; 4; $4\sqrt{2}$; ...; б) 5; $\sqrt{5}$; 1; $\frac{\sqrt{5}}{5}$;

ФОРМУЛА n -ГО ЧЛЕНА ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ

400

Запишите первые шесть членов геометрической прогрессии (b_n), если известно, что: а) $b_1 = -4$, $q = \frac{1}{2}$; б) $b_1 = 0,001$, $q = 10$. В каждом случае задайте прогрессию с помощью рекуррентной формулы и запишите формулу n -го члена для этой прогрессии.

401

Последовательность (y_n) — геометрическая прогрессия. Найдите:

- а) y_8 и y_{11} , если $y_1 = \frac{1}{81}$ и $q = 3$; в) y_7 и y_{10} , если $y_1 = \frac{3}{8}$ и $q = -2$;
 б) y_6 и y_9 , если $y_1 = 256$ и $q = \frac{1}{2}$; г) y_3 и y_6 , если $y_1 = -18$ и $q = -\frac{1}{3}$.

402

а) В геометрической прогрессии (b_n) $b_{10} = \frac{1}{243}$, $q = \frac{1}{3}$. Найдите b_1 .

б) В геометрической прогрессии (x_n) $x_{12} = 32$, $q = -2$. Найдите x_1 .

403

а) Между числами 3 и 27 вставьте три числа так, чтобы вместе с данными они образовывали геометрическую прогрессию. Сколько решений имеет задача?

б) Между числами 0,2 и 12,8 вставьте два числа так, чтобы вместе с данными они образовывали геометрическую прогрессию. Сколько решений имеет задача?

АРИФМЕТИЧЕСКАЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИИ

404

Последовательности заданы формулой n -го члена. Для каждой из них определите, является ли данная последовательность арифметической или геометрической прогрессией. Обоснуйте свой ответ:

- а) $b_n = 2 \cdot 5^n$; б) $b_n = 2 - 5n$; в) $b_n = 2 - 5^n$; г) $b_n = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

405

Запишите формулу n -го члена каждой последовательности и определите, является ли она арифметической или геометрической прогрессией:

- а) последовательность натуральных степеней числа 3;
 б) последовательность кубов натуральных чисел;
 в) последовательность натуральных чисел, кратных 7;
 г) последовательность натуральных чисел, которые при делении на 7 дают в остатке 4.

406

Является ли арифметической или геометрической прогрессией последовательность:

- а) b ; b^2 ; b^3 ; b^4 ; ... , $b \neq 0$; в) b ; $b + 1$; $b + 2$; $b + 3$; ...;
 б) b ; $2b$; $3b$; $4b$; $5b$; ... , $b \neq 0$; г) b ; ab ; a^2b ; a^3b ; a^4b ; ... , $b \neq 0$, $a \neq 0$?

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОГРЕССИИ ВОКРУГ НАС

407

Вернитесь к задаче о колонии бактерий (с. 145). а) Пусть численность первого поколения бактерий была 300 единиц. Определите численность десятого поколения бактерий. б) Численность шестого поколения бактерий равнялась 12 800 единиц. Какова была численность колонии бактерий первого поколения?

408

Мяч бросают вертикально вниз, и после каждого удара он подскакивает на высоту, равную $\frac{4}{5}$ предыдущей.

а) На какой высоте окажется мяч после четвёртого удара о землю, если после первого удара он подскочил на высоту, равную 250 см?

б) После четвёртого удара мяч подскочил на высоту, равную 64 см. На какую высоту подпрыгнул мяч после первого удара?

409

Три фирмы А, В и С одновременно начали свою деятельность, и в первый год доход каждой составил 4 млн р. В последующие четыре года их доход рос так:

в фирме *A* доход ежегодно увеличивался на 1 млн р., в фирме *B* ежегодно возрастал в 1,8 раза, в фирме *C* ежегодно увеличивался в 1,5 раза. Какой из графиков соответствует каждой из этих ситуаций (*рис. 4.10*)? Задайте каждую последовательность роста доходов с помощью формулы *n*-го члена.

410

Периметр треугольника равен 64 см (*рис. 4.11*). Средины сторон этого треугольника являются вершинами второго треугольника, середины сторон второго треугольника являются вершинами третьего треугольника и т.д.
1) Найдите периметр восьмого треугольника.
2) Периметр какого по счёту треугольника равен 4 см?

Рис. 4.11

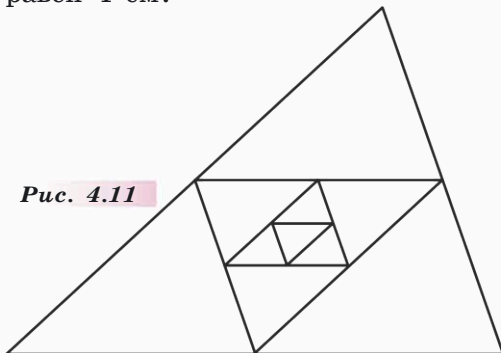
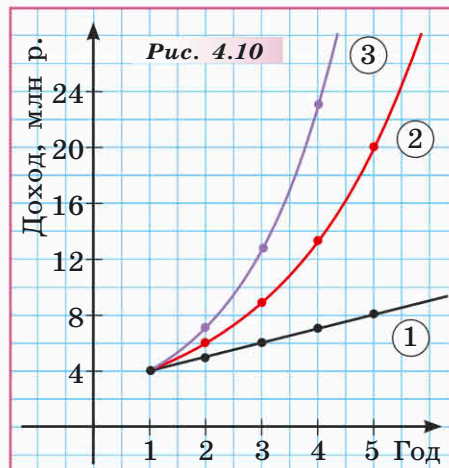


Рис. 4.12



411

Средины сторон прямоугольника соединили отрезками и получили ромб. Средины сторон ромба соединили отрезками и получили прямоугольник и т.д. (*рис. 4.12*).

- Чему равно отношение площадей двух соседних фигур (последующей и предыдущей)?
- Какой фигурой — прямоугольником или ромбом является восьмой по счёту четырёхугольник? Если его площадь равна $\frac{3}{4}$ см², то чему равна площадь исходного прямоугольника?
- Площадь какого по счёту четырёхугольника равна 6 см²? Какая это фигура — прямоугольник или ромб?

412

ЗАДАЧА-ИССЛЕДОВАНИЕ

- Проведите следующий эксперимент: возьмите любой (но не первый!) конкретный член геометрической прогрессии 2; 6; 18; 54; 162; ... , начиная со второго, и убедитесь в том, что он равен среднему геометрическому двух соседних членов. (Напомним, что среднее геометрическое двух положительных чисел *a* и *b* равно $\sqrt{ab}$.)
- Докажите, что это свойство справедливо для любой геометрической прогрессии, членами которой являются положительные числа.
- Используя полученный результат, найдите обозначенные буквами члены геометрической прогрессии, знаменатель которой — положительное число:
а) b_1 ; 6; b_3 ; 24; b_5 ; b_6 ; ...; б) 243; b_2 ; 81; ...; b_6 ; 9; b_8 ; ...

4.5

ВЫ УЗНАЕТЕ:

Формулы для суммирования первых n членов геометрической прогрессии и способы применения этих формул.



Художник Тиаго Круз.
Изобретатель шахмат.
Португалия

Чтобы представить себе «огромность» запрошенной изобретателем шахмат награды, вычислим примерную массу требуемого зерна. В среднем масса одного зёрнышка пшеницы равна 0,065 г. Умножив число зёрен на 0,065, получим, что масса зерна на шахматной доске должна была составить $1,2 \cdot 10^{13}$ т (т.е. 1,2 триллионов тонн).

СУММА ПЕРВЫХ n ЧЛЕНОВ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ

С геометрической прогрессией связано немало легенд. Вот одна из наиболее известных. Изобретатель шахмат, получив от правителя страны право самому выбрать награду, попросил положить на первую клетку доски одно зерно пшеницы, на вторую — два, на третью — четыре и т.д., удваивая число зёрен на каждой клетке. Властитель был поражён, когда выяснилось, что выполнить просьбу невозможно. Чтобы убедиться в этом, надо вычислить сумму членов геометрической прогрессии $1; 2; 2^2; 2^3; \dots; 2^{63}$.

ВЫВОД ФОРМУЛЫ Подсчитаем общее число зёрен S , которое попросил у правителя изобретатель шахмат:

$$S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{62} + 2^{63}.$$

Чтобы не суммировать такое большое число слагаемых, воспользуемся следующим приёмом: умножим обе части равенства на знаменатель прогрессии 2 и вычтем из полученного равенства исходное:

$$\begin{array}{r} 2S = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{63} + 2^{64} \\ - S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{62} + 2^{63} \\ \hline S = 2^{64} - 1 \end{array}$$

Это огромное число: 18 446 744 073 709 551 615. Такого количества пшеницы не было выращено за всё время существования земледелия на Земле.

Воспользуемся применённым приёмом и выведем формулу вычисления суммы любого числа первых n членов геометрической прогрессии (b_n). Обозначим эту сумму буквой S_n .

$$S_n = b_1 + b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + \dots + b_1q^{n-1}.$$

Умножим обе части этого равенства на знаменатель прогрессии q и вычтем из полученного равенства исходное:

$$\begin{array}{r} S_nq = b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + \dots + b_1q^{n-1} + b_1q^n \\ - S_n = b_1 + b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + \dots + b_1q^{n-1} \\ \hline S_nq - S_n = b_1q^n - b_1, \text{ т.е. } S_n(q - 1) = b_1(q^n - 1). \end{array}$$

Выразим из последнего равенства S_n , получим формулу суммы первых n членов геометрической прогрессии:

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Для $0 < q < 1$ формулу удобно представить в таком виде:

$$S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}.$$



Понятно, что выведенной формулой суммы можно пользоваться при условии, что знаменатель q геометрической прогрессии не равен 1. Если же $q = 1$, то все члены прогрессии равны между собой, и она имеет вид: $b_1; b_1; b_1; \dots$. Мы просто суммируем n одинаковых слагаемых: $S_n = nb_1$.

ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ СУММ

Пример 1. Найдём сумму

$$12 + 6 + 3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{16} + \frac{3}{32}.$$

Слагаемые в сумме являются членами геометрической прогрессии, в которой $b_1 = 12$, $q = \frac{1}{2}$. Всего слагаемых 8. Подставим в формулу $S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}$ значения b_1 , q и n :

$$\begin{aligned} S_8 &= \frac{12 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^8\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{12 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^8}\right)}{\frac{1}{2}} = 24 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^8}\right) = \\ &= 24 - \frac{24}{2^8} = 24 - \frac{2^3 \cdot 3}{2^8} = 24 - \frac{3}{32} = 23 \frac{29}{32}. \end{aligned}$$

Пример 2. Найдём сумму первых двадцати членов геометрической прогрессии 4; -8; 16; -32; 64; -128; ...

В этой прогрессии $b_1 = 4$, $q = -2$. Число суммируемых членов $n = 20$. Подставим эти значения в формулу $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$:

$$S_{20} = \frac{4 \cdot ((-2)^{20} - 1)}{-2 - 1} = \frac{4 \cdot (2^{20} - 1)}{-3}.$$

Вычислить значение этого выражения можно «вручную» (например, умножить 2^{10} на 2^{10} , т.е. 1024 на 1024) или с помощью калькулятора. Получим

$$S_{20} = -1398100.$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОГРЕССИИ ВОКРУГ НАС

Пример 3. На автозаводе проводили испытания автомобиля новой марки. В первый день испытатель проехал на нём 20 км, а затем ежедневно увеличивал пробег в 1,5 раза. Сколько всего километров прошёл автомобиль за неделю?

Ежедневные расстояния (в км) составляют геометрическую прогрессию: 20; $20 \cdot 1,5$; $20 \cdot 1,5^2$; ...

В этой прогрессии $b_1 = 20$, $q = 1,5$, $n = 7$. Подставим эти значения в формулу и воспользуемся калькулятором:

$$S_7 = \frac{20 \cdot ((1,5)^7 - 1)}{1,5 - 1} = 40 \cdot ((1,5)^7 - 1) \approx 640.$$

Ответ: автомобиль прошёл примерно 640 км.

Старинная задача

Из древнеегипетского папируса Ахмеса, учебного руководства по арифметике и геометрии (переписан около 1650 г. до н.э.):

«В семи домах имеется по семь кошек, каждая кошка съедает по семь мышей, каждая мышь уничтожает по семь колосьев, каждый колос даёт по семь мер зерна. Нужно подсчитать сумму числа домов, кошек, мышей, колосьев и мер зерна.»

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

● Запишите общую формулу для нахождения суммы первых n членов геометрической прогрессии.

● В каком виде удобнее представить эту формулу, если $0 < q < 1$? Каким свойством вы воспользовались для преобразования формулы к данному виду и почему в этом случае она удобнее?

● Запишите формулу для вычисления суммы первых двадцати членов геометрической прогрессии (b_n), в которой: а) $b_1 = 3$; $q = 5$; б) $b_1 = 32$; $q = \frac{1}{2}$.

● Вычислите расстояние, которое пройдёт автомобиль за время испытаний (см. пример 3), если они будут продолжаться 12 дней.

УПРАЖНЕНИЯ

РАБОТАЕМ С ФОРМУЛАМИ

413

Дана геометрическая прогрессия:

а) $18; 6; 2; \dots$;

б) $\frac{1}{18}; \frac{1}{6}; \frac{1}{2}; \dots$.

Найдите S_6 и S_n .

414

Запишите выражение для нахождения суммы первых n членов геометрической прогрессии (b_n) , если:

а) $b_1 = 1; q = 6$;

б) $b_1 = 1; q = \frac{1}{2}$;

в) $b_1 = \frac{1}{2}; q = -2$.

В каждом случае найдите S_6 .

415

Выпишите первые пять членов геометрической прогрессии (b_n) , заданной формулой n -го члена, и найдите их сумму: а) $b_n = 6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$; б) $b_n = -\frac{2}{81} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$.

416

а) В геометрической прогрессии (b_n) $b_4 = \frac{1}{32}$, $q = \frac{1}{2}$. Найдите S_8 .

б) Найдите сумму первых пяти членов геометрической прогрессии, если её пятый член равен -9 , а знаменатель равен -3 .

417

а) Знаменатель геометрической прогрессии равен -5 , а сумма первых трёх её членов равна -21 . Найдите сумму первых шести членов этой прогрессии.

б) Знаменатель геометрической прогрессии равен $\frac{1}{5}$, а сумма первых четырёх её членов равна $62\frac{2}{5}$. Найдите сумму первых двух членов этой прогрессии.

418

а) Известны два члена геометрической прогрессии (b_n) : $b_3 = 2$, $b_6 = -54$. Найдите S_6 .

б) Найдите сумму первых восьми членов геометрической прогрессии (b_n) , если известны два её члена: $b_2 = -8$, $b_8 = -\frac{1}{8}$.

419

Найдите значение выражения:

а) $4 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3^3 + \dots + 4 \cdot 3^9$;

б) $-3 - 6 - 12 - 24 - \dots - 3 \cdot 2^7$;

в) $1 - 2 + 4 - 8 + 16 - \dots - 2^9$;

г) $3^0 - 3^1 + 3^2 - 3^3 + \dots + 3^{10}$.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОГРЕССИИ ВОКРУГ НАС

420

Определите, сколько зёрен пшеницы должен был отдать правитель из описанной легенды изобретателю шахмат (с. 150) за первую половину шахматной доски.

421

При поступлении на работу будущий сотрудник был ознакомлен с условиями оплаты: в первый год его годовой заработок составит 240 000 рублей, а затем



Определение

АРИФМЕТИЧЕСКАЯ
ПРОГРЕССИЯГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ
ПРОГРЕССИЯ

$$a_{n+1} = a_n + d$$

$$b_{n+1} = b_n \cdot q$$

 n -й член

$$a_n = a_1 + d(n-1)$$

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

Сумма
первых
 n членов

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$S_n = \frac{b_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1},$$

$$q \neq 1$$

Для $0 < q < 1$:

$$S_n = \frac{b_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q}$$

в каждый следующий год будет увеличиваться в 1,1 раза по сравнению с предыдущим. Сотрудник планирует проработать на этом месте не менее 6 лет. Сколько он заработает за эти 6 лет? (Используйте калькулятор, ответ округлите до разряда тысяч.)

422

Почтальон заметил, что за 6 дней до праздника число разносимых им писем увеличивается ежедневно примерно в 1,5 раза. Сколько всего писем разнёс почтальон за 6 предпраздничных дней, если в первый из них он разнёс 32 письма?

423

Здесь приведена классическая задача, которая в разных источниках существует с разными сюжетами. Ситуация, описанная в данном случае, возникла в те времена, когда основным средством быстрой передачи сообщений на дальние расстояния был телеграф. Вот условие задачи: Телеграфистке поручено передать важную информацию трём другим телеграфисткам. Каждая из них, в свою очередь, должна передать сообщение трём другим телеграфисткам и т.д. На выполнение поручения у каждой телеграфистки уходит 6 минут. Сколько телеграфисток будут знать эту информацию через полчаса?



424

Премияльный фонд 48 750 р. надо разделить между четырьмя сотрудниками так, чтобы каждый следующий сотрудник в списке, составленном руководителем, получил в 1,5 раза больше предыдущего. Сколько получит каждый?

РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ

425

Из одинаковых кубиков строятся две ступенчатые фигуры (рис. 4.13). В первом случае столбики растут равномерно, а во втором высота каждого следующего столбика удваивается по сравнению с высотой предыдущего. Сколько кубиков потребуется для каждой из фигур, если в них содержится: по 8 столбиков; по n столбиков?

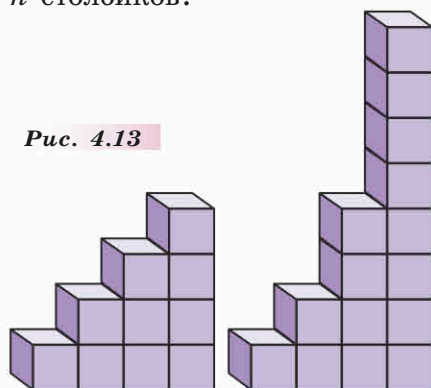
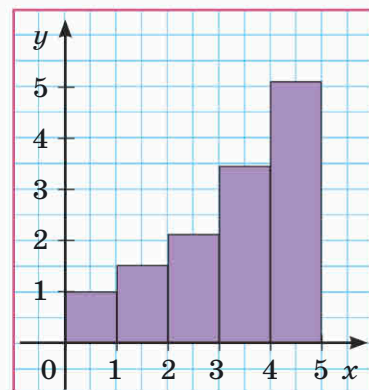


Рис. 4.13

Рис. 4.14



426

Фигура, изображённая на рисунке 4.14, составляется из прямоугольников, причём каждый следующий в 1,5 раза выше предыдущего. Найдите площадь фигуры, если она состоит из 5 прямоугольников; из n прямоугольников.

4.6

ВЫ УЗНАЕТЕ:

О двух разных способах начисления процентов в жизненной практике.



ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

а) Объясните, что следует понимать под термином «простые проценты».

б) Какой штраф заплатит пешеход, о котором идёт речь в примере 1, если просрочит оплату на 5 дней; на две недели?

а) Объясните, что понимают под термином «сложные проценты».

б) Пусть вкладчик внёс на счёт в банке 5000 р., и условия вклада те же, что рассмотрены в примере 2. Запишите выражение для вычисления суммы, которая будет на его счёте через 7 лет.

ПРОСТЫЕ И СЛОЖНЫЕ ПРОЦЕНТЫ

Наши бытовые процентные расчёты часто связаны с банковскими вкладами. О том, насколько выгоден тот или иной банковский вклад, судят не только по процентной ставке, но и по схеме начисления процентов. Обычно их может быть две — так называемые простые проценты и сложные проценты.

ЧТО ПОНИМАЮТ ПОД ПРОСТЫМИ ПРОЦЕНТАМИ

Пример 1. Пешеход перешёл улицу в неположенном месте и должен уплатить штраф 300 р. до 5 марта. За каждый просроченный день начисляется пени 2 % от этой суммы. Сколько заплатит пешеход, если он просрочит оплату штрафа на 10 дней?

Так как 2 % от 300 р. — это 6 р., то за каждый просроченный день сумма штрафа будет увеличиваться на 6 р. Штраф будет расти в арифметической прогрессии: 5 марта сумма штрафа будет ещё составлять 300 р., через день — $300 + 6 = 306$ р., через 2 дня $300 + 6 \cdot 2 = 312$ р. и т.д., через 10 дней сумма штрафа составит $300 + 6 \cdot 10 = 360$ р.

В таких случаях, когда при вычислении процентов всё время исходят из одного и того же начального значения величины, говорят о **простых процентах**.

ЧТО ПОНИМАЮТ ПОД СЛОЖНЫМИ ПРОЦЕНТАМИ

Существует и другая схема начисления процентов: на каждом следующем шаге процент вычисляется от величины, полученной на предшествующем шаге. В таком случае говорят о **начислении сложных процентов**.

Пример 2. Клиент открыл срочный вклад в банке на 5 лет и внёс на вклад 10 000 р. Ежегодно сумма, имеющаяся на счёте, увеличивается на 10 %: через год к сумме вклада добавляются 10 % от 10 000 р., ещё через год 10 % будут начислены уже на увеличенную сумму и т.д. в течение 5 лет. Какая сумма будет на счёте через 5 лет?

Ответить на вопрос можно последовательными вычислениями, но такая работа довольно трудоёмка. Поэтому будем рассуждать иначе.

В каждый следующий год новая сумма составляет 110 % от предыдущей суммы, т.е. увеличивается в 1,1 раза по сравнению с предыдущей. Имеем геометрическую прогрессию, первый член которой равен 10 000, знаменатель равен 1,1. И требуется найти 6-й член этой прогрессии (объясните, почему 6-й). Через 5 лет на счёте окажется

$$10\,000 \cdot 1,1^5 \text{ (р.)}.$$

Воспользовавшись калькулятором, получим, что сумма на счёте составит 16 105,1 р.

УПРАЖНЕНИЯ

Определите, о каких процентах — простых или сложных — идёт речь в задаче, и решите её (427–432):

427

Клиент банка взял автокредит 200 тыс. р. на 24 месяца и оформил страховку от несчастных случаев и болезней заёмщика. Стоимость страховки составляет 0,4 % от первоначальной суммы кредита ежемесячно.

а) Сколько составят страховые выплаты за один месяц? за n месяцев после взятия кредита?

б) Через сколько месяцев выплаты за страховку превысят 10 тыс. р.?

428

Цена нового автомобиля 450 000 р. При нормальных условиях эксплуатации его продажная стоимость с каждым годом уменьшается на 8 % от первоначальной цены.

а) За сколько рублей сможет продать автомобиль владелец через 4 года эксплуатации? через n лет эксплуатации?

б) Через сколько лет продажная стоимость автомобиля станет меньше 250 тыс. р.?

429

Клиент банка внёс 15 000 р. на срочный вклад с годовым доходом 6,5 %. Сколько денег будет на счёте через 1 год, 2 года, 3 года, если никакие суммы со счёта не снимаются и никаких дополнительных вложений не делается? Запишите формулу для вычисления суммы на счёте через n лет.

430

Андрей готовился к словарному диктанту по английскому языку. Накануне ночью он выучил 80 новых слов. Андрей знает, что без повторения он ежедневно забывает примерно 5 % слов, которые он помнил к этому дню. Сколько слов будет помнить Андрей, если диктант отложат на неделю и он не будет повторять выученные слова?

431

При покупке квартиры в строящемся доме покупатель заключил со строительной фирмой следующий договор: сразу после заключения договора он выплачивает 10 % стоимости квартиры, а далее начинает ежемесячно выплачивать 1,5 % от её стоимости. Квартира стоит 1 200 000 р.

а) Составьте формулу для вычисления суммы, выплаченной покупателем квартиры через n месяцев после заключения договора. Вычислите, сколько было выплачено через 1 год; через 2 года.

б) Составьте формулу для вычисления суммы, которую осталось заплатить через n месяцев с начала действия договора, и найдите, сколько останется заплатить через 1 год; через 2 года.

в) На сколько лет рассчитана выплата стоимости квартиры?

г) Проиллюстрируйте графически ситуации, описанные в заданиях «а» и «б», откладывая по горизонтальной оси число лет, в течение которых производится расчёт, а по вертикальной оси — денежные суммы.



432

Николай и Сергей вложили по 10 000 р. в разные банки. У Николая годовой доход составляет 10 %, а у Сергея — 5 %. Верно ли, что: а) доход Николая через год будет в 2 раза больше, чем доход Сергея; б) доход Николая через 3 года будет в 2 раза больше, чем доход Сергея?

УЗНАЙТЕ БОЛЬШЕ

БЕСКОНЕЧНО УБЫВАЮЩАЯ
ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

Какие геометрические прогрессии являются бесконечно убывающими? Древнегреческий философ Зенон Элейский (V в. до н.э.) сформулировал несколько парадоксальных рассуждений о движении. Наиболее известным из них является парадокс «Ахиллес и черепаха». Вот его содержание:

«Пусть Ахиллес бежит в 10 раз быстрее, чем черепаха, и находится позади неё на расстоянии 1000 шагов. За то время, за которое Ахиллес пробежит это расстояние, черепаха в ту же сторону проползёт 100 шагов. Когда Ахиллес пробежит сто шагов, черепаха проползёт ещё десять шагов, и т.д. Процесс будет продолжаться до бесконечности, Ахиллес так никогда и не догонит черепаху».

Конечно, в действительности Ахиллес догонит черепаху. Но Зенон своими парадоксами показывал, что современная ему наука не умеет обращаться с такими ситуациями. Мы рассмотрим этот сюжет с точки зрения темы, обозначенной в заголовке. Запишем последовательность расстояний (в шагах), которые должен пробежать Ахиллес на каждом описанном в задаче этапе:

$$1000; 100; 10; 1; \frac{1}{10}; \frac{1}{100}; \frac{1}{1000}; \frac{1}{10000}; \dots$$

Получили геометрическую прогрессию (b_n) , в которой $b_1 = 1000$, $q = \frac{1}{10}$. С возрастанием n члены этой прогрессии становятся всё меньше и меньше и всё приближаются и приближаются к нулю, однако равными нулю никогда не станут. (Ахиллес и черепаха никогда не окажутся в одной точке.) Говорят, что члены этой последовательности *стремятся к нулю*, или что геометрическая прогрессия *сходится к нулю*. Таким свойством обладают те, и только те геометрические прогрессии, знаменатель q которых находится в интервале от -1 до 1 , т.е. $|q| < 1$. Их называют *бесконечно убывающими геометрическими прогрессиями*.

Примеры бесконечно убывающих геометрических прогрессий:

1) $b_1 = 1$, $q = \frac{1}{2}$: $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \dots; \frac{1}{2^{n-1}}; \dots$. При неограниченном возрастании n (при $n \rightarrow \infty$) $\frac{1}{2^{n-1}}$ стремится к нулю.

2) $b_1 = -5$, $q = \frac{1}{5}$: $-5; -1; -\frac{1}{5}; -\frac{1}{25}; -\frac{1}{125}; \dots; -\frac{1}{5^{n-2}}; \dots$. Члены прогрессии находятся слева от нуля и при $n \rightarrow \infty$ становятся всё ближе и ближе к нулю.

3) $b_1 = 3$, $q = -\frac{1}{3}$: $3; -1; \frac{1}{3}; -\frac{1}{9}; \frac{1}{27}; -\frac{1}{81}; \dots; 3 \cdot (-\frac{1}{3})^{n-1}; \dots$. Члены прогрессии попеременно находятся то справа, то слева от нуля и неограниченно приближаются к нулю.

Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Рассмотрим бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, в которой $b_1 = 1$, $q = \frac{1}{2}$: $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \dots; \frac{1}{2^{n-1}}; \dots$. Запишем последовательность сумм первых n членов этой прогрессии, начиная с S_1 : $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$. Она будет выглядеть так: $1; 1\frac{1}{2}; 1\frac{3}{4}; 1\frac{7}{8}; 1\frac{15}{16}; 1\frac{31}{32}; \dots$. Чем больше последовательных членов геометрической прогрессии (b_n) будем суммировать, тем получающиеся суммы будут ближе к числу 2, но никогда не достигнут его. Таким свойством обладает каждая геометрическая прогрессия, у которой $|q| < 1$, только «предельное» число у каждой своё. Его называют *суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии* и обозначают буквой S (рис. 4.15).

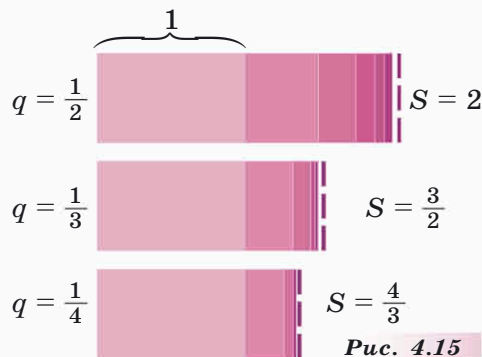
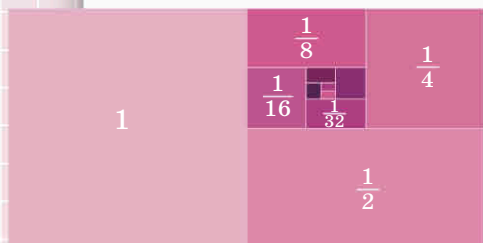


Рис. 4.15



$$1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots}_{1} = 2$$

Рис. 4.16

Этот парадоксальный факт (сумма бесконечного числа слагаемых имеет определённое конечное значение) легко поясняет рисунок 4.16. На нём указаны площади левого квадрата и прямоугольников, на которые последовательно разбивается равный ему правый квадрат:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots = 2.$$

Для вычисления суммы любой бесконечно убывающей геометрической прогрессии имеется формула

$$S = \frac{b}{1 - q}.$$

В ней S — это сумма бесконечного числа слагаемых:

$S = b + b \cdot q + b \cdot q^2 + b \cdot q^3 + \dots + b \cdot q^{n-1} + \dots$, b — первый член прогрессии, $|q| < 1$.

Применение формулы. Вы уже знакомы с одним из способов представления бесконечной десятичной периодической дроби обыкновенной дробью (с. 50). Пусть дана периодическая дробь $0,(6)$. Она может быть записана в виде бесконечной суммы $0,(6) = 0,6 + 0,06 + 0,006 + 0,0006 + \dots$, которая представляет собой сумму членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом $0,6$ и знаменателем $0,1$. Используя формулу $S = \frac{b}{1 - q}$, получаем $0,6 + 0,06 + 0,006 + 0,0006 = \frac{0,6}{1 - 0,1} = \frac{0,6}{0,9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$. Значит, $0,(6) = \frac{2}{3}$.

1

Определите, какие из следующих геометрических прогрессий являются бесконечно убывающими, и найдите их сумму:

а) $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \dots$; в) $5^2; 5^1; 5^0; 5^{-1}; \dots$;

б) $5^{-1}; 5^0; 5^1; 5^2; \dots$; г) $1; \frac{3}{2}; \frac{9}{4}; \frac{27}{8}; \dots$.

2

Определите, через сколько шагов Ахиллес догонит черепаху, вычислив сумму $1000 + 100 + 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10000} + \dots$.

3

Представьте в виде обыкновенной дроби: а) $0,(7)$; б) $0,(12)$; в) $0,1(3)$.

0 1 1 2 3 4 5 6 7

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1

1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1

1 13 78 286 715 1287 1716 1716 1287 715 286 78 13 1

1 14 91 364 1001 2002 3003 3432 3003 2002 1001 364 91 14 1

1 15 105 462 1365 2730 4353 5005 5005 4353 2730 1365 462 105 15 1

1 16 120 560 1632 3360 5005 6188 6188 5005 3360 1632 560 120 16 1

1 17 136 680 2184 4641 7635 10416 12870 12870 10416 7635 4641 2184 680 136 17 1

1 18 153 816 2856 6188 10416 15504 20349 23733 23733 20349 15504 10416 6188 2856 816 153 18 1

1 19 171 969 3527 7635 13641 23733 35270 43545 46188 43545 35270 23733 13641 7635 3527 969 171 19 1

1 20 190 1140 4374 9684 17710 28741 43740 57153 61880 57153 43740 28741 17710 9684 4374 1140 190 20 1

1 21 210 1330 5427 12078 23185 39212 57153 76350 84460 84460 76350 57153 39212 23185 12078 5427 1330 210 21 1

1 22 231 1540 6723 15480 30030 50050 76350 104160 128700 136410 128700 104160 76350 50050 30030 15480 6723 1540 231 22 1

1 23 253 1771 8160 20020 39212 61880 92427 128700 155040 163296 155040 128700 92427 61880 39212 20020 8160 1771 253 23 1

1 24 276 2016 9684 25228 46188 76350 110556 155040 194481 203490 194481 155040 110556 76350 46188 25228 9684 2016 276 24 1

1 25 300 2275 11400 30030 57153 92427 136410 184765 223140 231850 223140 184765 136410 92427 57153 30030 11400 2275 300 25 1

1 26 325 2550 13365 36410 70049 110556 163296 223140 287410 300300 287410 223140 163296 110556 70049 36410 13365 2550 325 26 1

1 27 351 2850 15585 42921 84460 136410 203490 273027 336024 352700 336024 273027 203490 136410 84460 42921 15585 2850 351 27 1

1 28 378 3168 18060 50050 98019 163296 243100 323140 392121 404970 392121 323140 243100 163296 98019 50050 18060 3168 378 28 1

1 29 406 3512 20901 58008 114000 194481 287410 384435 461880 477835 461880 384435 287410 194481 114000 58008 20901 3512 406 29 1

1 30 435 3885 24060 67230 136410 243100 364100 481635 571530 585855 571530 481635 364100 243100 136410 67230 24060 3885 435 30 1

1 31 465 4287 27555 77925 163296 287410 435450 571530 684630 700490 684630 571530 435450 287410 163296 77925 27555 4287 465 31 1

1 32 496 4718 31400 90080 203490 352700 527035 684630 816216 828870 816216 684630 527035 352700 203490 90080 31400 4718 496 32 1

1 33 528 5178 35610 104850 243100 429210 641520 844600 1001400 1015200 1001400 844600 641520 429210 243100 104850 35610 5178 528 33 1

1 34 561 5668 40200 121440 287410 500500 763500 1001400 1207800 1222650 1207800 1001400 763500 500500 287410 121440 40200 5668 561 34 1

1 35 595 6189 45180 139980 336024 618800 924270 1207800 1456680 1471500 1456680 1207800 924270 618800 336024 139980 45180 6189 595 35 1

1 36 630 6741 50550 160560 392121 700490 1041600 1364100 1632960 1647840 1632960 1364100 1041600 700490 392121 160560 50550 6741 630 36 1

1 37 666 7323 56385 183300 461880 844600 1287000 1716000 2034900 2050080 2034900 1716000 1287000 844600 461880 183300 56385 7323 666 37 1

1 38 703 7937 62685 208560 542700 1001400 1550400 2034900 2431000 2446200 2431000 2034900 1550400 1001400 542700 208560 62685 7937 703 38 1

1 39 741 8583 69450 236040 618800 1140000 1716000 2318500 2874100 2889300 2874100 2318500 1716000 1140000 618800 236040 69450 8583 741 39 1

1 40 780 9261 76680 266880 700490 1364100 2034900 2730270 3360240 3375480 3360240 2730270 2034900 1364100 700490 266880 76680 9261 780 40 1

1 41 820 9975 84390 300300 800160 1632960 2431000 3231400 3921210 3936450 3921210 3231400 2431000 1632960 800160 300300 84390 9975 820 41 1

1 42 861 10725 92580 337680 924270 2034900 3003000 3921210 4618800 4634040 4618800 3921210 3003000 2034900 924270 924270 337680 92580 10725 861 42 1

1 43 903 11511 101250 379200 1048500 2431000 3641000 4816350 5715300 5730540 5715300 4816350 3641000 2431000 1048500 379200 101250 11511 903

Нетрудно видеть, что коэффициенты многочленов образуют соответствующие строки треугольника Паскаля. Очевидно, что коэффициенты многочлена, равного $(a + b)^5$ образуют пятую строку треугольника Паскаля, $(a + b)^6$ — шестую строку и т.д. Вообще, *коэффициенты многочлена, равного $(a + b)^n$* ,

где n — произвольное натуральное число, образуют n -ю строку треугольника Паскаля.

Запишем с помощью символа C_n^m полученные первые четыре равенства:

n	Формула
0	$(a + b)^0 = C_0^0$
1	$(a + b)^1 = C_1^0 a + C_1^1 b$
2	$(a + b)^2 = C_2^0 a^2 + C_2^1 ab + C_2^2 b^2$
3	$(a + b)^3 = C_3^0 a^3 + C_3^1 a^2 b + C_3^2 ab^2 + C_3^3 b^3$

Из таблицы можно заметить, что:

- число членов многочлена в правой части равенства на единицу больше n — показателя степени двучлена;
- сумма показателей каждого члена многочлена равна показателю степени двучлена n ;
- показатель степени переменной a последовательно понижается от n до 0, а переменной b повышается от 0 до n ;
- коэффициент одночлена, в котором b содержится в степени m , равен C_n^m .

Пользуясь сделанными наблюдениями, можно записать:



$$(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^n b^n.$$

Записанное равенство называют *формулой бинома Ньютона* (слово «бином» латинского происхождения и переводится как «двучлен»). А числа $C_n^0, C_n^1, \dots, C_n^n$ называют биномиальными коэффициентами. Таким образом, строки треугольника Паскаля дают нам биномиальные коэффициенты, т.е. коэффициенты многочлена, который получается при возведении двучлена $a + b$ в степень с натуральным показателем.

1 Постройте в тетрадах первые десять строк треугольника Паскаля. (Это пригодится вам при решении следующих задач.)

2 Проверьте на примерах, что сумма элементов каждой следующей строки треугольника Паскаля в два раза больше суммы элементов предыдущей строки. Объясните, почему так получается.

3 Убедитесь в том, что сумма элементов пятой строки треугольника Паскаля равна 2^5 ; десятой строки — 2^{10} . Докажите, что сумма элементов строки с номером n равна 2^n .

Подсказка. Можно воспользоваться результатом упражнения 2 или подставить в формулу бинома Ньютона $a = 1$ и $b = 1$.

4 Запишите с помощью символа C_n^m шестую, седьмую и восьмую строки треугольника Паскаля.

5 Сравните C_5^3 и C_5^2 ; C_7^1 и C_7^6 ; C_{10}^6 и C_{10}^4 . Сформулируйте соответствующее свойство и запишите его с помощью символов.

6 Представьте в виде многочлена:

а) $(a + b)^6$; б) $(x + y)^9$; в) $(x - 1)^5$; г) $(a + 2c)^4$; д) $(2x - 3y)^3$.

7 Докажите, что сумма биномиальных коэффициентов, стоящих на чётных местах, равна сумме биномиальных коэффициентов, стоящих на нечётных местах.

Подсказка. Подставьте в формулу бинома Ньютона $a = 1$ и $b = -1$.

ПОДВЕДЁМ ИТОГИ

Числовые последовательности

Задать последовательность — это значит указать правило, позволяющее найти член последовательности с любым номером.

Способы задания:

- *формулой n -го члена* — она позволяет вычислить любой член последовательности по его номеру;

- *с помощью рекуррентной формулы* — члены последовательности вычисляются поочередно, один за другим;

- *словесным описанием.*

1) Последовательность (x_n) задана формулой $x_n = n^2 + n$.

Найдём x_{100} :

$$x_{100} = 100^2 + 100 = 10\,100.$$

2) Последовательность (c_n) задана условиями:

$$c_1 = 1, c_{n+1} = 4 - c_n.$$

Найдём c_4 :

$$c_2 = 4 - c_1 = 4 - 1 = 3;$$

$$c_3 = 4 - c_2 = 4 - 3 = 1;$$

$$c_4 = 4 - c_3 = 4 - 1 = 3.$$

3) Последовательность простых чисел, взятых в порядке возрастания.

Арифметическая прогрессия

Определение. Арифметической прогрессией называется последовательность, каждый член которой, начиная со второго, получается прибавлением к предыдущему члену одного и того же числа d : $a_{n+1} = a_n + d$.

Число d называют *разностью* арифметической прогрессии.

$a_{n+1} - a_n = d$ — в арифметической прогрессии разность между любым её членом, начиная со второго, и предыдущим членом является постоянной и равна d .

1) 2; 4; 6; 8; ...; $2n$; ... — арифметическая прогрессия, разность которой равна 2; это возрастающая арифметическая прогрессия;

2) -3; -6; -9; ...; $-3n$; ... — арифметическая прогрессия, разность которой равна -3; это убывающая арифметическая прогрессия;

3) 10; 10; ...; 10; ... — арифметическая прогрессия, разность которой равна 0; её называют постоянной.

Формула n -го члена арифметической прогрессии: $a_n = a_1 + d(n - 1)$.

4) В арифметической прогрессии $a_1 = 1,2$, $d = 0,6$.

Найдём a_{25} :

$$a_{25} = 1,2 + 0,6 \cdot 24 = 1,2 + 14,4 = 15,6.$$

Формула суммы первых n членов арифметической прогрессии:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2},$$

или иначе:

$$S_n = \frac{(2a_1 + d(n-1))n}{2}.$$

5) Дана арифметическая прогрессия 1,5; 2; Найдём S_{20} .
Дано:

$$a_1 = 1,5, d = 2 - 1,5 = 0,5.$$

Способ 1:

$$a_{20} = 1,5 + 0,5 \cdot 19 = 11;$$

$$S_{20} = \frac{(1,5 + 11) \cdot 20}{2} = 12,5 \cdot 10 = 125.$$

Способ 2:

$$S_{20} = \frac{(2 \cdot 1,5 + 0,5 \cdot 19) \cdot 20}{2} = 125.$$

Геометрическая прогрессия

Определение. Геометрической прогрессией называют последовательность, первый член которой отличен от нуля и каждый следующий член, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же не равное нулю число q : $b_{n+1} = b_n \cdot q$. Число q — *знаменатель* геометрической прогрессии.

$\frac{b_{n+1}}{b_n} = q$ — в геометрической прогрессии отношение любого её члена, начиная со второго, к предыдущему члену является постоянным и равно знаменателю прогрессии.

1) 2; 4; 8; 16; ...; 2^n ; ... — геометрическая прогрессия со знаменателем 2; эта геометрическая прогрессия является возрастающей.

2) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; ...; $\frac{1}{2^n}$; ... — геометрическая прогрессия, $q = \frac{1}{2}$; эта геометрическая прогрессия является убывающей.

3) -2; 4; -8; ...; $(-1)^n \cdot 2^n$; ... — геометрическая прогрессия, $q = -2$; это знакопеременная геометрическая прогрессия.

Формула n -го члена геометрической прогрессии:

$$b_n = b_1 q^{n-1}.$$

Формула суммы первых n членов геометрической прогрессии при $q \neq 1$:

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}.$$

При $0 < q < 1$ формулу удобно представить в виде

$$S_n = \frac{b_1(1 - q^n)}{1 - q}.$$

4) В геометрической прогрессии $b_1 = 324$, $q = \frac{1}{3}$. Найдём b_8 :

$$b_8 = 324 \cdot \frac{1}{3^7} = \frac{324}{3^7} = \frac{4 \cdot 3^4}{3^7} = \frac{4}{27}.$$

5) Дана геометрическая прогрессия $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \dots$.

Найдём S_8 :

$$b_1 = 1, q = \frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned} S_8 &= \frac{1 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^8\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2^8 - 1}{2^8 \cdot \frac{1}{2}} = \\ &= \frac{2^8 - 1}{2^7} = 2 - \frac{1}{2^7} = 1 \frac{127}{128}. \end{aligned}$$

- 1 Последовательность (a_n) задана формулой $a_n = \frac{1}{n^2}$. Найдите: a_5 ; a_{12} ; a_{k+1} .
- 2 Дана последовательность $2; \frac{3}{2}; \frac{4}{3}; \frac{5}{4}; \frac{6}{5}; \dots$. Запишите три следующих числа и составьте формулу n -го члена.
- 3 Выпишите первые шесть членов последовательности (r_n) , если $r_1 = 3$, $r_{n+1} = r_n - 2$.
- 4 Дана арифметическая прогрессия $7,5; 7; 6,5; 6; \dots$. Найдите следующие три члена этой прогрессии. Чему равна разность прогрессии? Найдите 100-й член этой прогрессии.
- 5 Какой номер имеет член арифметической прогрессии, равный 180, если её первый член равен -20 , а разность равна $2,5$?
- 6 В арифметической прогрессии $a_1 = 12$, $d = 2,5$. Является ли членом этой прогрессии число 60; число 87?
- 7 Последовательность $-1; -3; -5; \dots$ — арифметическая прогрессия. Найдите S_{30} .
- 8 Турист в первый день прошёл 25 км, а в каждый следующий день — на 1,5 км меньше, чем в предыдущий. Какое расстояние он прошёл за неделю?
- 9 Дана геометрическая прогрессия $120; -60; 30; \dots$. Чему равен её знаменатель? Найдите 12-й член этой прогрессии.
- 10 Одна из последовательностей не является геометрической прогрессией. Какая?
1) $3; 9; 27; \dots$ 2) $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \dots$ 3) $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \dots$ 4) $-3; 9; -27; \dots$
- 11 Последовательности (x_n) , (y_n) и (z_n) заданы рекуррентным способом:
1) $x_1 = 2$; $x_{n+1} = 3x_n$; 2) $y_1 = 2$; $y_{n+1} = y_n + 3$; 3) $z_1 = 2$; $z_{n+1} = 3 - z_n$.
Какая из этих последовательностей является геометрической прогрессией?
- 12 Найдите сумму первых десяти членов геометрической прогрессии $6; 2; \frac{2}{3}; \dots$.
- 13 В телевизионной игре за верный ответ на первый вопрос ведущего играющему начисляют 100 р., а за каждый следующий верный ответ выигранная сумма удваивается. Играющий ответил верно на 11 вопросов. Каков его выигрыш?
- 14 С четверга по воскресенье одной недели число посетителей музея ежедневно увеличивалось в 1,5 раза. Сколько человек посетили музей за эти дни, если в четверг в нём побывало 320 человек?
- 15 Ежемесячная оплата услуг ЖКХ в городе N должна вноситься до определённого числа. За каждый просроченный день начисляется дополнительно 1 % от суммы оплаты. Сколько придётся заплатить квартиросъёмщику за январь, если ему начислено 800 р., и он просрочил оплату на 12 дней?
- 16 Мяч, брошенный вертикально вниз, после удара о землю подскакивает на высоту, равную 80 % его предыдущей высоты. Мяч был брошен с высоты 2 м. На какую высоту подпрыгнет мяч после третьего удара о землю?

5

ГЛАВА

СТАТИСТИКА, ВЕРОЯТНОСТЬ, КОМБИНАТОРИКА

- ВЫБОРОЧНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ
- ИНТЕРВАЛЬНЫЙ РЯД. ГИСТОГРАММА
- ХАРАКТЕРИСТИКИ РАЗБРОСА
- СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОЦЕНИВАНИЕ И ПРОГНОЗ
- РАЗМЕЩЕНИЯ И СОЧЕТАНИЯ

Узнайте больше

- ☐ ВЕРОЯТНОСТЬ И КОМБИНАТОРИКА

АНДРЕЙ КОЛМОГОРОВ

Андрей Николаевич Колмогоров — один из крупнейших математиков XX в., основоположник современной теории вероятностей. Им также получены фундаментальные результаты в самых разных областях современной математики и её приложений — в математической логике, теории множеств, топологии, в классической механике, теории сложности алгоритмов и многих других.

Во время Великой Отечественной войны Колмогоров, используя свои исследования по теории вероятностей, получил важнейшие результаты в баллистике, дал определение наивыгоднейшего рассеивания снарядов при стрельбе.

В 1960-х годах он сыграл решающую роль в модернизации отечественного математического образования, стал автором многих школьных учебников, инициатором создания журнала «Квант» для детей, увлечённых математикой и физикой, а для тех из них, кто жил вдалеке от научных центров, — специальной школы-интерната при Московском университете, ныне это школа имени А.Н. Колмогорова.

5.1

ВЫ УЗНАЕТЕ:

Как проводят статистические исследования.

ВСПОМНИТЕ:

Изученные статистические характеристики: моду, медиану, среднее арифметическое, размах.



В начале XIX в. к применению теории вероятностей и статистики к различным сферам жизни общества относились скептически. Скептиков посрамил бельгийский математик Адольф Кетле (1796–1874) — применив новые математические методы, он обнаружил подложные данные, касающиеся уклонения от военной службы во Франции. Проанализировав рост мужчин, он показал, что около двух тысяч молодых людей намеренно занизили свой рост, указав, что он меньше минимально допустимого.

ВЫБОРОЧНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Уже в Древнем мире вели статистический учёт населения. Однако произвольные толкования данных и отсутствие научной базы позволили в конце XIX в. премьер-министру Великобритании Б. Дизраэли не без основания заметить: «Есть три вида лжи: просто ложь, наглая ложь и статистика». Строгая научная база появилась в XX в. Это математическая статистика — наука, основанная на законах теории вероятностей.

ВЫБОРКА И СОВОКУПНОСТЬ Основным методом статистики является *выборочный метод*. Мы рассмотрим его применение на конкретном примере.

Представим, что в одном из регионов России решили выяснить уровень знаний девятиклассников по математике. Чтобы получить достоверную информацию, совсем не обязательно проводить контрольную работу во всех девятих классах региона, или, как говорят статистики, обследовать всю *генеральную совокупность* учащихся. Достаточно составить *выборку* учащихся девятих классов. Важно, чтобы выборка правильно представляла всю генеральную совокупность, т.е. была представительной (или репрезентативной). В этом случае полученные результаты с высокой степенью вероятности можно распространить на всю генеральную совокупность.

Построение репрезентативной выборки — это тонкий и сложный процесс, который осуществляют специалисты. Отметим, что отбор учащихся, которые войдут в выборку, производят случайным образом, т.е. так, чтобы обеспечить одинаковую вероятность попадания в выборку любого учащегося всей генеральной совокупности девятиклассников региона.

ТАБЛИЦЫ И ДИАГРАММЫ ЧАСТОТ Пусть составлена выборка из 50 учащихся, проведена контрольная работа, в которой было 6 заданий. В алфавитном списке учеников, писавших работу, возле каждой фамилии проставили число верно решённых этим учеником задач. Получился ряд чисел:

4; 2; 0; 6; 2; 3; 4; 3; 3; 0; 1; 5; 2; 6; 4; 3; 3;
2; 3; 1; 3; 3; 2; 6; 2; 2; 4; 3; 3; 6; 4; 2; 0; 3;
3; 5; 2; 1; 4; 4; 3; 4; 5; 3; 2; 3; 1; 6; 2; 2.

Однако в таком наборе чисел разобраться трудно. Поэтому первый шаг, который следует сделать, — это упорядочить полученные данные, например расположить их по возрастанию:

0; 0; 0; 1; 1; 1; 1;
2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2;
3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3; 3;
4; 4; 4; 4; 4; 4; 4; 4; 5; 5; 5; 6; 6; 6; 6; 6.

Такой упорядоченный ряд называют *ранжированным*. Для анализа он значительно удобнее. Мы видим, что в нём семь неодинаковых «по длине» групп, каждая из которых представляет определённое событие: не решено ни одной задачи, решена одна задача и т.д. Мы видим, как часто в выборке появляется каждое событие. Например, число повторений события «не решено ни одной задачи» равно 3. Частота этого события равна отношению числа повторений к объёму выборки, т.е. $\frac{3}{50}$, или 6 %. Чтобы результаты легче воспринимались, их представляют в табличном и графическом виде.

Число верно решённых задач	0	1	2	3	4	5	6
Число повторений	3	4	12	15	8	3	5
Частота	0,06	0,08	0,24	0,3	0,16	0,06	0,1



Составив таблицу, полезно себя проверить: сложив число всех повторений, мы должны получить объём выборки, а сложив все частоты, должны получить 1.

АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ИССЛЕДОВАНИЯ Полагая, что выборка была репрезентативной, мы можем на основании полученных результатов с достаточной уверенностью судить об уровне знаний всех девятиклассников региона. Например, в выборке 10 % учащихся решили все задачи. Значит, можно ожидать, что примерно 10 % всех девятиклассников региона справятся со всеми шестью задачами.

Далее, считалось, что учащийся достиг обязательно-го уровня знаний по математике, если он верно решил не менее двух задач. Таковых в выборке

$$12 + 15 + 8 + 3 + 5 = 43 \text{ человека,}$$

что составляет 86 % от её объёма. Значит, можно предположить, что и среди всех девятиклассников региона примерно 86 % имеют минимально необходимый уровень знаний по математике. Из них хорошую математическую подготовку (решено не менее четырёх задач) имеют примерно 32 % учащихся.

С помощью ранжирования ряда, таблицы и графических иллюстраций мы уже получили первоначальные сведения о закономерностях интересующего нас ряда данных. Но вам известны статистические характеристики ряда данных, которые позволяют все его отдельные значения заменить некоторыми общими для всей генеральной совокупности показателями.

Так, например, можно узнать наиболее типичный результат выполнения работы. Используя данные таблицы, легко видеть, что наиболее часто встречающийся

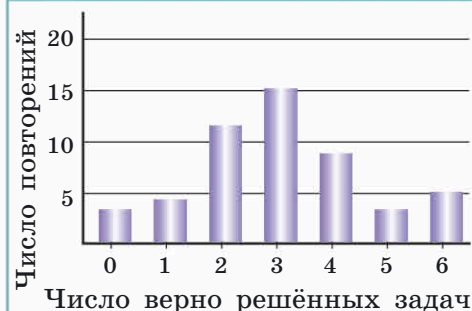
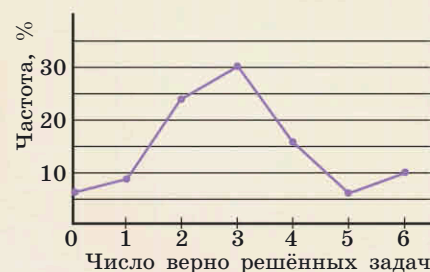


Рис. 5.1

Для графического представления результатов часто используют так называемые *полигоны частот*. Для их построения на горизонтальной оси отмечают результаты случайного эксперимента, а на вертикальной — соответствующие им частоты или число повторений. Отмеченные точки последовательно соединяют отрезками. Полученная ломаная и есть полигон частот.





Английская сестра милосердия Флоренс Найтингейл (1820–1910) была участницей Крымской войны. С помощью статистических исследований и грамотно представленных результатов она смогла убедить верховное главнокомандование Великобритании в радикальном изменении устройства лазаретов, в результате менее чем за шесть месяцев смертность в них снизилась с 42 до 2,2 %. Она спасла многие жизни и стала первой женщиной — членом британского Королевского статистического общества.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Приведите пример статистического исследования и опишите на этом примере применение выборочного метода.
- Найдите в газетах, журналах, Интернете примеры статистических исследований в экономике, демографии, метеорологии, других отраслях.
- Какой ряд называют ранжированным?
- Приведите обоснование утверждения, что по результатам данного исследования примерно 32 % учащихся имеют хорошую математическую подготовку.
- Пересчитайте результаты исследования по более строгому критерию: ученик достиг обязательного уровня знаний, если он решил не менее трёх задач.

результат — «решены три задачи». На языке статистики это означает, что число 3 является *модой* данного числового ряда.

Результат «среднего» девятиклассника характеризуется *медианой* ряда данных, т.е. значением, расположенным в середине ранжированного ряда. Так как ряд содержит 50 чисел, то медиана — это полусумма 25-го и 26-го чисел, она равна 3. Это означает, что половина учащихся решила не больше трёх задач, а другая половина — не меньше трёх задач.

Найдём среднее арифметическое этого ряда:

$$\bar{x} = \frac{0 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 2 \cdot 12 + 3 \cdot 15 + 4 \cdot 8 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 5}{50} = \frac{150}{50} = 3.$$

Значит, можно сказать, что в среднем девятиклассник решает 3 задачи. Это можно интерпретировать так: если бы все учащиеся решили задач поровну, то каждый решил бы 3 задачи.

В данном случае все три характеристики совпали, но, конечно, это происходит далеко не всегда.

Результаты подобных исследований представляют интерес для многих: работников образования, учителей, родителей, учащихся. Например, управление образования могут интересовать средние результаты по школам, процент учеников, не справившихся с программой, а университеты заинтересуют количество учеников с высоким уровнем математической подготовки.

Бывают случаи, когда проводится обследование всей генеральной совокупности, например, все выпускники девятих классов пишут экзаменационную работу по математике. Но чаще статистический анализ всей совокупности объектов невозможен или не имеет никакого смысла.

Например, перед инспекцией стоит задача контроля качества продукции, выпускаемой большими партиями. Как проверить, пропечён ли хлеб, годны ли консервы, прочна ли ткань? Сплошная проверка всей партии абсолютно бессмысленна. Ведь при такой проверке придётся фактически испортить и уничтожить саму продукцию. Именно в таких случаях и применяется выборочный метод статистического исследования.



Результаты опросов иногда ставят под сомнение, считая, что выборка нерепрезентативна. «Как же так, она не охватывает даже 10 % совокупности!» Оказывается, размер репрезентативной выборки не зависит от величины генеральной совокупности. Здесь подойдёт такая аналогия: если мы посолили суп, то не имеет значения, какой ложкой мы будем его пробовать: большой или маленькой, важно, хорошо ли мы его перемешали.

УПРАЖНЕНИЯ

РЕПРЕЗЕНТАТИВНА ЛИ ВЫБОРКА?

433

1) Среди учащихся школы был проведён опрос на тему «Трудно ли вам учиться?». Опросили мальчиков — учеников 9 класса. Как вы думаете, можно ли считать эту выборку репрезентативной, если нужно:

- а) выяснить степень нагрузки в целом по школе;
- б) получить данные по 9 классу?

2) Определите, является ли репрезентативной выборка:

- а) число автомобильных аварий в июне, если нужно составить статистический отчёт по авариям в городе за год;
- б) городские жители, если нужно выяснить число автомобилей на душу населения в стране;
- в) люди в возрасте от 40 до 50 лет при выяснении рейтинга молодёжной телепрограммы.

434

Перепись населения — процесс сбора и обобщения данных населения, относящихся ко всем лицам в стране по состоянию на определённое время. Это пример статистического обследования всей генеральной совокупности.

Основными принципами проведения переписи населения являются:

1. Всеобщность.
2. Одномоментность.
3. Единая программа переписи.
4. Поимённость.
5. Самоопределение.
6. Конфиденциальность.
7. Строгая централизация управления переписи.
8. Регулярность проведения.

Обсудите, какие из этих принципов характерны и для выборочных исследований.



ОБРАБАТЫВАЕМ РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

435

Закинул старик в реку невод. Пришёл невод с таким уловом (в порядке вылова):

П О Л С Я П К О З К П К Я С О П П Л О О
Л С О П Л П К Л К П П С П З К Я П З С О
О Я П П О Л С Л С П О П Л К С О Я Л П С
О Л П О К Л П О О П О Я Л П С П О Л П З

Буквами обозначены рыбы:

З — золотая рыбка; К — карась; Л — лещ;
О — окунь; П — пескарь; С — сом; Я — язь.

- а) Произведите ранжирование ряда данных в алфавитном порядке.
- б) Составьте таблицу частот.
- в) Какой процент улова составляют золотые рыбки?
- г) Используя полученную стариком выборку, оцените, какие виды рыб наиболее и наименее распространены в местах, где старик закинул невод.



436

В детском магазине за декаду было продано 750 пар обуви. В отделе учёта проводили статистическое исследование и с этой целью записывали размеры каждой пятой проданной пары.

Эти числа составили следующий ряд данных:



23, 24, 16, 21, 18, 17, 20, 23, 18, 16, 19, 18, 22, 19, 21, 17, 24, 15, 23, 19, 16, 22, 18, 24, 19, 17, 22, 19, 15, 23, 21, 23, 19, 23, 17, 22, 16, 19, 22, 18, 20, 15, 21, 23, 19, 18, 23, 22, 20, 17, 19, 23, 21, 24, 22, 23, 20, 22, 21, 18, 16, 19, 22, 23, 20, 24, 21, 19, 24, 16, 20, 23, 24, 18, 22, 17, 15, 21, 24, 20, 19, 17, 21, 20, 15, 23, 24, 18, 16, 22, 23, 24, 21, 15, 23, 22, 20, 23, 19, 20, 17, 22, 19, 20, 24, 15, 23, 18, 22, 23, 15, 21, 15, 24, 19, 18, 19, 17, 15, 19, 23, 20, 17, 22, 23, 20, 18, 22, 19, 20, 18, 19, 24, 18, 16, 21, 24, 17, 15, 20, 22, 21, 24, 22, 18, 22, 18, 24, 15, 21.

- Постройте таблицу частот.
- Определите моду ряда (самый распространённый размер).
- Постройте диаграмму частот.
- Найдите медиану этой выборки.

437

На некотором маршруте метрополитена провели исследование пассажиропотока. Для этого каждый час в случайно выбранном вагоне электропоезда на протяжении всего пути считали число пассажиров разных возрастов. Результаты исследования представлены в таблице:

Время Возраст	6 ч 30 мин	7 ч 30 мин	8 ч 30 мин	9 ч 30 мин	10 ч 30 мин	11 ч 30 мин
До 7 лет	1	3	5	13	16	11
7–10 лет	3	5	15	20	11	5
11–20 лет	9	11	20	18	15	7
21–30 лет	15	25	38	35	17	15
31–40 лет	12	36	50	42	37	18
41–50 лет	15	31	43	36	29	12
51–60 лет	4	9	24	17	16	14
61–70 лет	1	4	5	5	6	6
Старше 70 лет	0	2	0	3	1	2

- Определите час пик — время, когда в вагоне едет наибольшее число людей.
- Найдите время, когда частота возрастной категории от 31 до 40 лет максимальна.
- Какой процент от всех пассажиров вагона, отправившегося в 11 ч 30 мин, составляют люди в возрасте от 21 до 50 лет?

438

Фирма «Бурёнка и компания» производит и продаёт молоко разной жирности. Объёмы продаж за месяц сведены в диаграмме на рисунке 5.2.

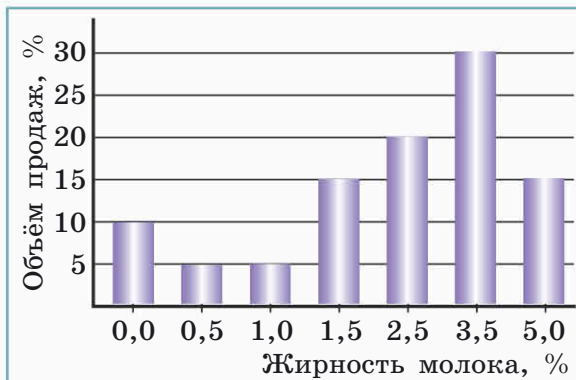
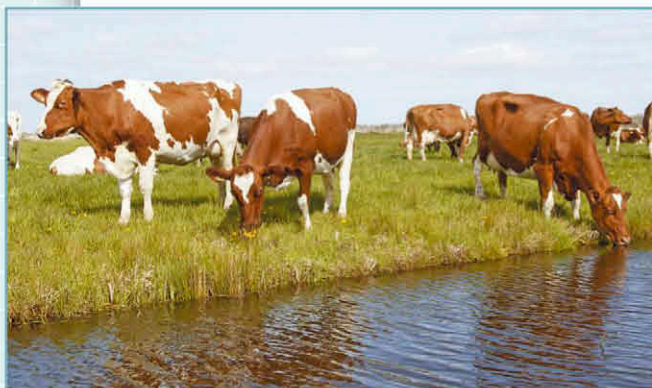


Рис. 5.2

- Определите наиболее популярный сорт молока.
- Какой процент проданного количества молока составляет полностью обезжиренное молоко?
- Считая, что всего было продано 40 000 литров молока, составьте таблицу частот.
- Определите средний процент жирности молока.

439

Администрация города опубликовала данные о числе комнат в квартирах горожан. Результаты показаны на диаграмме (рис. 5.3).

Чтобы проверить эти данные, представители независимой организации ста прохожим на улице задали вопрос: «Сколько комнат в вашей квартире?» Ниже приведены ответы в порядке поступления:

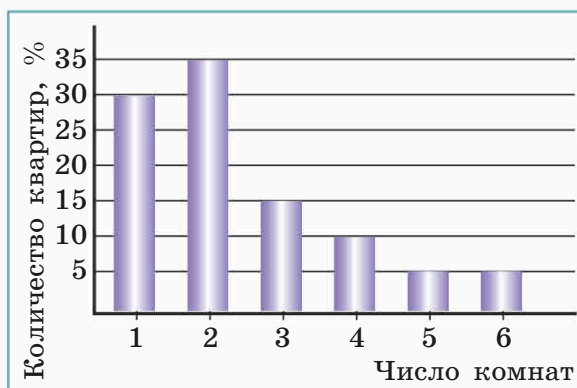


Рис. 5.3

2, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 6, 2, 4, 1, 2, 3, 1, 2, 2, 3, 2, 2, 5, 1, 1, 2, 5, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 2, 6, 1, 1, 6, 2, 3, 1, 2, 1, 4, 2, 1, 1, 3, 1, 2, 2, 5, 4, 2, 1, 2, 1, 1, 3, 2, 2, 3, 3, 2, 4, 1, 1, 2, 4, 1, 1, 2, 2, 4, 3, 3, 6, 1, 1, 2, 4, 2, 1, 2, 1, 5, 3, 1, 2, 2, 2, 5, 1, 3, 1, 2, 4, 3, 2, 6, 3, 2, 4.

- Постройте полигоны частот по данным, опубликованным администрацией, и по данным, полученным в ходе опроса.
- Соответствуют ли данные, полученные по выборке, данным, приведённым администрацией?

440

Статистика аварий говорит о том, что за 10 лет на самолётах авиакомпании ABC было в три раза больше происшествий, чем на самолётах авиакомпании DEF, но в два раза меньше, чем на самолётах авиакомпании XYZ.

- Определите относительную частоту происшествий на самолётах авиакомпании DEF среди общего числа аварий самолётов этих авиакомпаний.
- Какой процент от общего числа происшествий занимают происшествия на самолётах авиакомпании XYZ?
- Постройте диаграмму частот аварий.
- Если всего за 10 лет случилось 300 происшествий, то сколько пришлось на каждую авиакомпанию?

5.2

ВЫ УЗНАЕТЕ:

Как построить интервальный ряд данных и представить его графически на гистограмме частот.

ИНТЕРВАЛЬНЫЙ РЯД.
ГИСТОГРАММА

Данные могут иметь самую разную природу. И при этом необязательно, что в полученном ряду они будут повторяться. Как же понять закономерности распределения данных в таком ряду?

ИНТЕРВАЛЬНАЯ ТАБЛИЦА ЧАСТОТ В одной городской школе было проведено статистическое исследование: выбранных наугад 100 учеников попросили замерить, сколько минут каждый из них тратит на дорогу в школу. В результате получили ряд данных:

27, 52, 43, 38, 47, 8, 21, 40, 32, 53, 45, 54, 35, 28, 40, 18, 31, 45, 24, 30, 37, 15, 39, 34, 48, 25, 30, 7, 32, 12, 26, 35, 48, 19, 33, 26, 17, 30, 42, 22, 53, 28, 42, 36, 23, 10, 34, 46, 16, 29, 35, 52, 41, 32, 21, 39, 55, 25, 29, 8, 36, 44, 26, 55, 34, 19, 42, 54, 27, 10, 45, 20, 31, 50, 18, 9, 41, 14, 38, 40, 23, 49, 33, 15, 24, 46, 36, 28, 32, 37, 51, 20, 29, 47, 33, 27, 41, 22, 39, 40.

Мы видим, что одинаковые значения здесь встречаются редко, а число различных вариантов довольно велико, и поэтому ранжирование не позволит выявить характерные черты этого ряда.

В таких случаях для обработки данных строят интервальный ряд. Для этого весь промежуток, содержащий данные выборки, от наименьшего значения до наибольшего, разбивают на интервалы (обычно равные), а затем подсчитывают, сколько данных попадает в каждый из них. Построим интервальный ряд для нашего случая.

Наибольшее значение в ряду — число 55, а наименьшее — число 7. Таким образом, размах данных равен $55 - 7 = 48$.

Разобьём найденный промежуток на несколько равных интервалов. При этом будем учитывать следующее: интервальный ряд не должен быть слишком громоздким, а концы и середины интервалов лучше сделать целыми числами — это упростит последующие вычисления.

Возьмём в качестве длины интервалов число 8. За начало первого интервала принято брать значение, расположенное на полинтервала левее наименьшего значения в ряду. В нашем случае это будет число 3.

Теперь нетрудно посчитать границы всех интервалов: от 3 до 11, от 11 до 19, от 19 до 27, от 27 до 35, от 35 до 43, от 43 до 51, от 51 до 59. Всего у нас получилось 7 интервалов.

Найдём, сколько значений из выборки попадает в каждый интервал (при этом значение, оказавшееся на границе двух интервалов, будем считать лежащим в

Вы никогда не замечали, что некоторые цифры в нашей жизни встречаются чаще других? А вот американский физик Ф. Бенфорд обратил. Чтобы доказать свою гипотезу, он проанализировал данные по площади бассейна рек, населению городов, молекулярной массе химических соединений, удельной теплоёмкости материалов. И получил для каждой из цифр следующие вероятности её появления на первом месте числа:

Цифра	Вероятность
1	30,1 %
2	17,6 %
3	12,5 %
4	9,7 %
5	7,9 %
6	6,7 %
7	5,8 %
8	5,1 %
9	4,6 %

правом промежутке), и сведём все данные по интервальному ряду в одну таблицу.

Интервал времени, мин	Подсчёт	Число значений	Частота
3–11	/	6	0,06
11–19		8	0,08
19–27		17	0,17
27–35		24	0,24
35–43		23	0,23
43–51		13	0,13
51–59		9	0,09

Мы построили так называемую *интервальную таблицу частот*. Из таблицы видно, что, например, в промежутке от 35 до 43 мин оказалось 23 значения из исследуемого ряда. Обратите внимание: по таблице уже нельзя сказать, чему равно каждое из этих значений; известно только, что все они лежат в данном промежутке.

ГИСТОГРАММА ЧАСТОТ Для интервального ряда используют специальное графическое изображение — *гистограмму частот*. Для построения гистограммы на горизонтальной оси откладывают интервалы, на которые разбит весь промежуток, и на них как на основаниях строят прямоугольники с высотами, равными числу значений или частотам. Полученная ступенчатая фигура и называется гистограммой частот (*рис. 5.4*).

Как же по интервальному ряду определить, сколько времени в среднем тратят ребята на дорогу в школу? Для упрощения исследования возьмём, как это делают в подобных случаях, середину каждого интервала и соответствующую этому интервалу частоту. Получим более простую таблицу:

Время, мин	7	15	23	31	39	47	55
Число значений	6	8	17	24	23	13	9
Частота	0,06	0,08	0,17	0,24	0,23	0,13	0,09

По этой таблице нетрудно найти среднее арифметическое упрощенного ряда:

$$\bar{x} = \frac{7 \cdot 6 + 15 \cdot 8 + 23 \cdot 17 + 31 \cdot 24 + 39 \cdot 23 + 47 \cdot 13 + 55 \cdot 9}{100} = 33.$$

Или, используя частоты:

$$7 \cdot 0,06 + 15 \cdot 0,08 + 23 \cdot 0,17 + 31 \cdot 0,24 + 39 \cdot 0,23 + 47 \cdot 0,13 + 55 \cdot 0,09 = 33.$$

Мы видим, что в среднем учащиеся тратят на дорогу в школу 33 мин. Это достаточно большое время, и стоит задуматься о постройке новой школы.

Закономерность, выявленная и доказанная Ф. Бенфордом, носит название «закона аномальных чисел». Применяют его, например, в аудиторских компаниях (аудит — это проверка финансовой отчётности фирм). На основе этого закона разработаны тесты, позволяющие выявить нерегулярности в данных, что говорит о возможных нарушениях. В некоторых штатах США несоответствие данных закону Бенфорда является формальной уликой в суде.

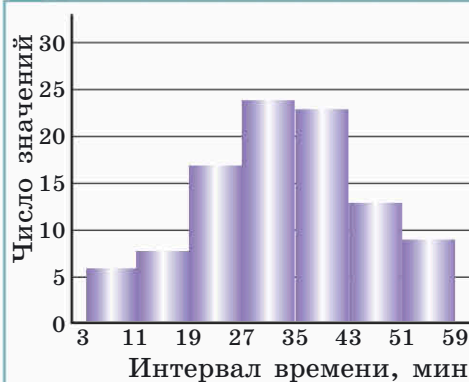


Рис. 5.4

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- В каких случаях строят интервальный ряд?
- Расскажите, как построить интервальную таблицу.
- Как по гистограмме частот найти среднее арифметическое ряда данных?

УПРАЖНЕНИЯ

СТРОИМ И ЧИТАЕМ ГИСТОГРАММЫ ЧАСТОТ

441

Используя таблицу, составленную по информации из № 437, постройте гистограмму частот по возрастам пассажиров для поезда, отправляющегося в 6 ч 30 мин.

Возраст, лет	до 7	7–10	11–20	21–30	31–40	41–50	51–60	61–70	старше 70
Число пассажиров	1	3	9	15	12	15	4	1	0

442

В таблице приведены данные по температуре в городе N в июне 2014 г. и в июне 2015 г. В ней отражена информация о ежедневных наблюдениях.

а) Вычислите средние температуры за июнь в 2014 г. и в 2015 г. В каком году средняя температура в июне была выше?

б) Постройте гистограмму частот для 2014 г.

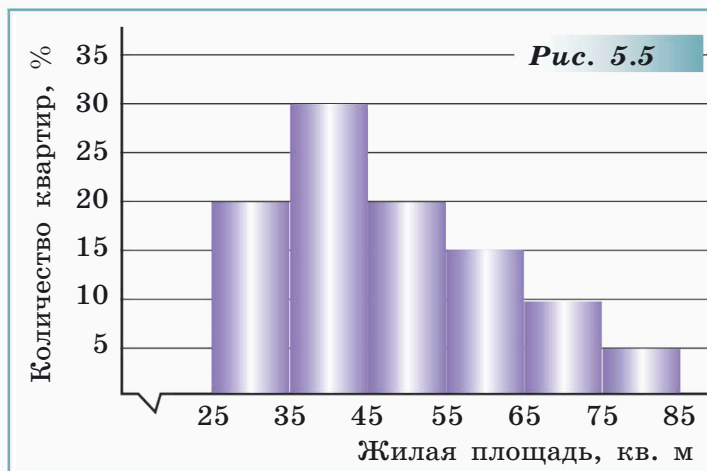
Температура, °C	Количество дней	
	Июнь 2014 г.	Июнь 2015 г.
14–18	2	1
18–22	9	6
22–26	12	15
26–30	6	3
30–34	1	5

443

На гистограмме (рис. 5.5) представлены данные о площадях квартир в одном из микрорайонов города N . Всего в выборке 1500 квартир.

а) Составьте таблицу частот для срединных значений каждого интервала, указанного на гистограмме.

б) Найдите среднюю площадь квартиры в исследуемом микрорайоне.



444

В небоскрёбе 90 этажей. За день лифт вызывали на каждый этаж несколько раз: на первый этаж лифт вызывали 29 раз, на второй — 9 раз, на третий — 27 раз и т.д. К вечеру получилось, что число вызовов составляет следующий ряд (в порядке возрастания порядкового номера этажа):

29, 9, 27, 11, 18, 6, 20, 21, 7, 12, 25, 28, 22, 21, 19, 23, 15, 24, 13, 19, 17, 26, 17, 24, 8, 10, 13, 16, 27, 15, 14, 27, 11, 20, 9, 15, 6, 17, 22, 23, 12, 19, 7, 16, 24, 12, 5, 14, 26, 15, 10, 21, 17, 8, 25, 18, 29, 21, 17, 15, 28, 12, 26, 22, 10, 26, 11, 18, 16, 22, 29, 13, 6, 20, 7, 19, 23, 28, 13, 5, 20, 14, 7, 15, 16, 19, 8, 22, 18, 14.

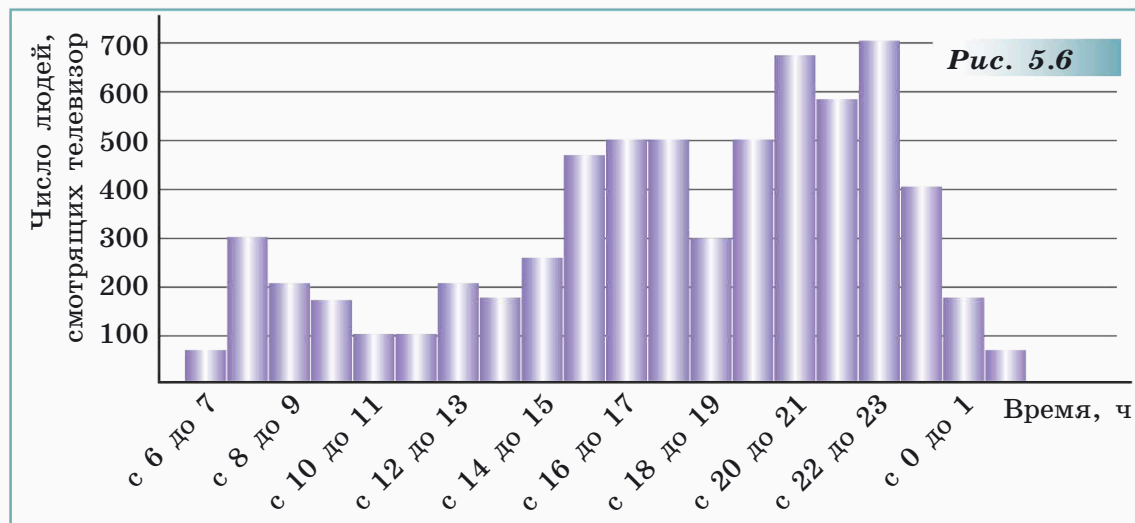
а) Постройте для данного ряда интервальный ряд.

Подсказка. Определите размах ряда, возьмите длину промежутка, равную 4 единицам, и вычислите границы интервалов.

- б) Для интервального ряда составьте таблицу частот.
в) Постройте гистограмму частот.

445

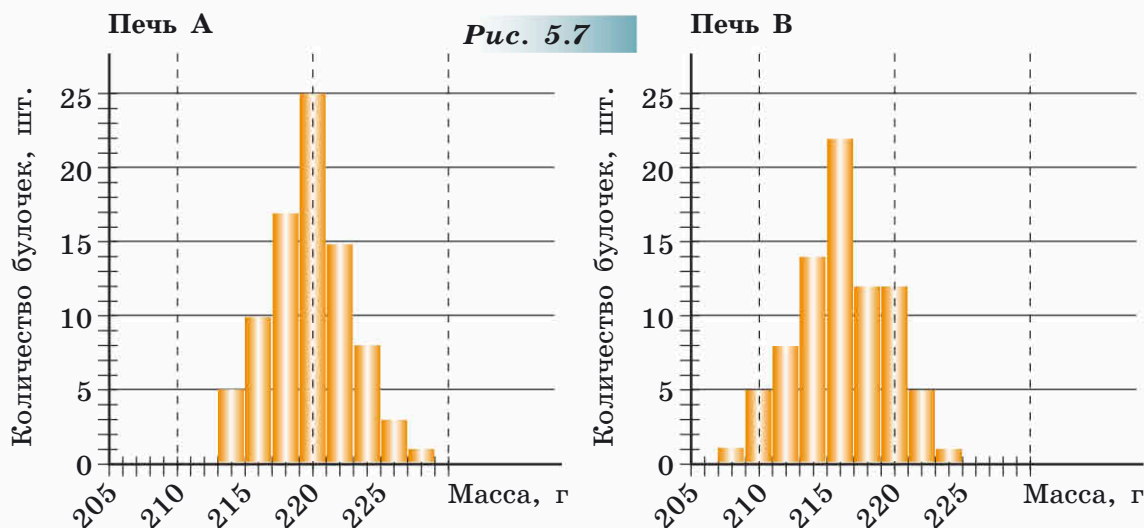
Работниками телевидения был проведён опрос среди молодёжи с целью определения времени просмотра телевизионных программ. Всего было опрошено 1000 человек. Зависимость числа зрителей от времени суток показана на гистограмме (рис. 5.6).



- а) В какие периоды времени число людей, смотрящих телевизор, превосходит 500 человек? Какой процент от всего времени показа составляет время, когда телевизор смотрят более 500 человек?
б) Сколько человек в среднем смотрят телевизор в течение часа в период с 16 до 19 часов? Какой процент всех опрошенных составляют эти люди?

446

Масса булочки должна составлять 220 ± 10 г. В пекарне две печи, и у пекаря есть подозрение, что с одной из них не всё в порядке. На гистограммах (рис. 5.7) представлены данные о массе двух порций булочек, выпеченных в печах А и В. Действительно ли существует проблема, и если да, то с какой из печей? Подсказка. Обратите внимание на вертикальные штриховые линии.



5.3

ВЫ УЗНАЕТЕ:

О новых характеристиках разброса — дисперсии и стандартном отклонении.

Математическая статистика как наука начинается с работ знаменитого немецкого математика Карла Фридриха Гаусса (1777–1855). Разработанные методы он применял для обработки астрономических данных, необходимых для уточнения орбиты малой планеты Церера. Его именем часто называют одно из наиболее популярных распределений вероятностей — нормальное распределение.



Gauss

ХАРАКТЕРИСТИКИ РАЗБРОСА

Вам известны характеристики числового ряда, позволяющие оценить его поведение в среднем, — среднее арифметическое, медиана, мода. Их ещё называют показателями центра распределения. Для более полного представления о числовом ряде, помимо средних, надо знать характеристики разброса, показывающие, как сильно значения ряда «рассеяны» вокруг средних.

РАЗМАХ И ОТКЛОНЕНИЯ Одна из простейших характеристик — *размах*. Однако её недостаточно. На величину размаха может повлиять даже одно значение в ряду данных. Кроме того, размах — слишком грубая мера разброса, поскольку учитывает только два числа в ряду — наибольшее и наименьшее.

О том, насколько разбросаны числа в ряду данных, можно судить по их *отклонениям от среднего арифметического*. Среднее арифметическое данных $x_1; x_2; \dots; x_n$ равно $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$. Отклонения от среднего соответственно равны $\bar{x} - x_1, \bar{x} - x_2, \dots, \bar{x} - x_n$.

Пример 1. Найдём отклонения от среднего арифметического для следующего ряда: 1; 3; 4; 6; 7; 10; 11. Среднее арифметическое равно 6, отклонения соответственно равны: 6 – 1, 6 – 3, 6 – 4 и т.д. Ряд отклонений выглядит так: 5; 3; 2; 0; –1; –4; –5.

Понятно, что отклонения могут быть и положительными, и отрицательными, и равными нулю. При этом сумма всех отклонений всегда равна нулю.



Если модули отклонений малы, то данные сгруппированы около среднего. Чем больше модули отклонений, тем более разбросанным является ряд.

ДИСПЕРСИЯ И СТАНДАРТНОЕ ОТКЛОНЕНИЕ Такая характеристика, как набор отклонений, неудобен, если чисел много; желательно иметь одно число, некоторое «среднее». Очевидно, что использовать «среднее отклонение» нельзя, так как оно равно нулю. В статистике принято находить такую меру разброса, как *дисперсия*, и обозначать её буквой D .



Дисперсия — это среднее арифметическое квадратов отклонений от среднего значения.

На величину дисперсии влияют все отклонения, причём независимо от их знаков.

Найдём дисперсию ряда из Примера 1:

$$D = \frac{25 + 9 + 4 + 0 + 1 + 16 + 25}{7} = \frac{80}{7} \approx 11,4.$$

$$\text{В общем случае } D = \frac{(\bar{x} - x_1)^2 + (\bar{x} - x_2)^2 + \dots + (\bar{x} - x_n)^2}{n}.$$

Но у дисперсии есть один существенный недостаток: если исходные значения ряда измеряются в каких-то единицах (например, в часах), то у дисперсии эти единицы возводятся в квадрат («квадратные» часы). Избавиться от таких странных единиц измерения можно, если использовать другую характеристику разброса — *стандартное отклонение*.



$$D = \sigma^2$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{(\bar{x} - x_1)^2 + (\bar{x} - x_2)^2 + \dots + (\bar{x} - x_n)^2}{n}}$$



Стандартным (или средним квадратичным) отклонением числового ряда называется квадратный корень из дисперсии.

Стандартное отклонение обозначают греческой буквой σ (сигма), поэтому дисперсию часто обозначают σ^2 . В Примере 1 стандартное отклонение $\sigma \approx \sqrt{11,4} \approx 3,4$.

Пример 2. Найдём размах и стандартное отклонение отметок ученика, заданных частотной таблицей:

Отметка	2	4	5
Число повторений	1	3	6
Частота	0,1	0,3	0,6

Из таблицы видно, что всего отметок 10. Размах ряда отметок вычислить просто: он равен разности последнего и первого значений в этом ряду: $5 - 2 = 3$.

Найдём среднее арифметическое отметок:

$$\bar{x} = \frac{2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 6}{10} = 4,4.$$

Дисперсию, как и среднее арифметическое, можно вычислять либо с использованием числа повторений:

$$D = \frac{(2 - 4,4)^2 \cdot 1 + (4 - 4,4)^2 \cdot 3 + (5 - 4,4)^2 \cdot 6}{10} = 0,84,$$

либо с использованием частот:

$$D = (2 - 4,4)^2 \cdot 0,1 + (4 - 4,4)^2 \cdot 0,3 + (5 - 4,4)^2 \cdot 0,6 = 0,84.$$

Теперь вычислим стандартное отклонение:

$$\sigma = \sqrt{0,84} \approx 0,92.$$

Обратите внимание: практически все отметки ученика отличаются от среднего менее чем на σ , т.е. он учится достаточно стабильно. Одна двойка, которая выпадает из этого диапазона, по-видимому, для него случайная.



В физике стандартное отклонение используется для определения погрешности в серии проведённых измерений.

Если стандартное отклонение велико, то полученным данным, скорее всего, доверять нельзя: результаты измерений или метод, которым они были получены, следует перепроверить.

Большую услугу развитию статистики оказал Джон Граунт, живший в Лондоне в середине XVII в. В то время частым явлением были различные эпидемии, уносившие жизни огромного числа людей. Вся эта информация фиксировалась и хранилась в церквях и была доступна для изучения продолжительности жизни, что важно, например, для страховых компаний. Работа Граунта — первая оценка численности населения Лондона, основанная на методах статистики.

Natural and Political OBSERVATIONS

Mentioned in a following INDEX,
and made upon the

Bills of Mortality.

BY

Capt. JOHN GRAUNT,
Fellow of the Royal Society.

With reference to the Government, Religion, Trade, Growth, Air, Diseases, and the several Changes of the said CITY.

— Non me ut miretur Turba, laboro,
Contentus paucis Lectioribus. —

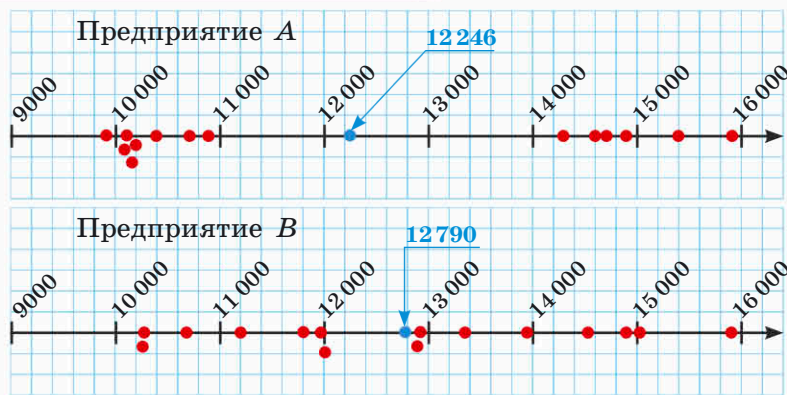
The Fifth Edition, much Enlarged.

LONDON,

Printed by John Marjyn, Printer to the
Royal Society, at the Sign of the Bell in St. Paul's
Church-yard. MDCLXXVI.

Понятие «средний человек» появилось в XIX в. Первоначально «средний человек» служил воплощением всех типичных, усреднённых качеств (физических, нравственных, интеллектуальных), которыми обладал человек. Позднее это понятие стало означать просто среднестатистического человека (потребителя, избирателя и пр.).

Рис. 5.8



ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Для ряда из Примера 1 убедитесь, что сумма всех отклонений равна нулю.
- Дайте определение дисперсии и стандартного отклонения.
- Что можно сказать о ряде данных, модули отклонений которого малы?
- Расскажите, как вычислить дисперсию с помощью таблицы частот.

КАК МОЖНО ИСПОЛЬЗОВАТЬ ХАРАКТЕРИСТИКИ РАЗБРОСА ДЛЯ АНАЛИЗА ДАННЫХ Проведём небольшое статистическое исследование (для всех подсчётов будем использовать калькулятор).

Пример 3. Имеются данные о зарплате (в рублях) работников двух конкурирующих малых предприятий А и В в 2015 г.:

А: 10 130, 10 900, 14 340, 10 410, 10 350, 9 920, 14 720, 15 420, 10 090, 15 920, 14 950, 10 760, 10 180, 14 630, 10 970;

В: 11 840, 15 880, 12 910, 11 170, 10 290, 11 980, 12 860, 10 740, 10 340, 14 910, 12 020, 15 020, 13 360, 14 550, 13 980.

Как сравнить эти два ряда? Можно отметить, что зарплаты находятся в одной и той же «вилке» — от 10 000 до 16 000 р. Размах данных практически одинаков.

Подсчитаем среднее арифметическое зарплат, получим: $\bar{x}_A = 12\,246$ р., $\bar{x}_B = 12\,790$ р. Средняя зарплата на предприятии В несколько выше.

Для наглядности представим результаты на координатной прямой (рис. 5.8).

На глаз видно, что на предприятии В зарплаты группируются кучнее вокруг средней, чем на предприятии А. Вычислим в каждом случае дисперсию и стандартное отклонение. Дисперсия зарплат на предприятии А равна 5 232 757, а стандартное отклонение:

$$\sigma_A \approx \sqrt{5\,232\,757} \approx 2288.$$

Точно также найдём дисперсию зарплат для предприятия В. Она приблизительно равна 3 006 947. Стандартное отклонение:

$$\sigma_B \approx \sqrt{3\,006\,947} \approx 1734.$$

Оно меньше, чем для предприятия А, что подтверждает, что числа второго ряда группируются кучнее.

Проанализируем полученные результаты.

Во-первых, средняя зарплата на предприятии В примерно на 544 р. выше, чем на предприятии А. Это означает, что человек, поступающий работать на предприятие В, может ожидать большей зарплаты, чем человек, поступающий на предприятие А.

Во-вторых, разброс зарплат на предприятии А больше, чем на предприятии В. Это означает, что для работающего на предприятии В больше вероятность получить зарплату, близкую к средней, больше стабильность, зато на предприятии А больше возможность получать высокую зарплату, но и больше риск получать зарплату, существенно меньшую средней.

УПРАЖНЕНИЯ

ВЫЧИСЛЯЕМ

447

Проведите все вычисления из Примера 3 самостоятельно. Самое трудоёмкое — вычисление дисперсии. Чтобы вычислить дисперсию, удобно в каждом случае составить таблицу (начало таблицы для зарплат на предприятии А):

x	$ \bar{x} - x $	$(\bar{x} - x)^2$
10 130	2116	4 477 456
10 900	1346	1 811 716
14 340	2094	4 384 836
...	...	...

Сверьте полученные вами результаты с теми, что приведены в учебнике.

448

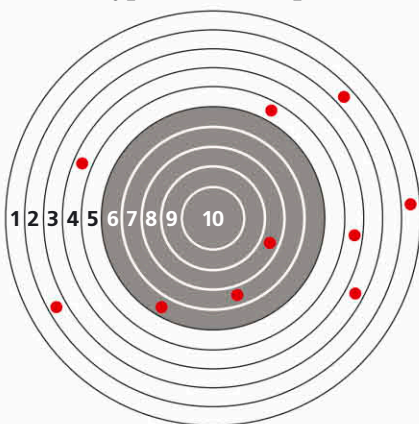
Для каждого из двух наборов чисел вычислите среднее арифметическое, дисперсию, стандартное отклонение и сравните их:

а) 3, 7, 10, 11, 19 и 10, 11, 15, 17, 22; б) 1, 3, 5, 7, 9 и 2, 4, 6, 8, 10.

449

На рисунке 5.9 представлены две мишени — результаты стрельбы курсантов Макарова и Токарева. Сравните, не вычисляя, среднее арифметическое и среднеквадратичное отклонение двух рядов — результатов стрельбы. Проверьте себя, выполнив вычисления.

Курсант Макаров



Курсант Токарев

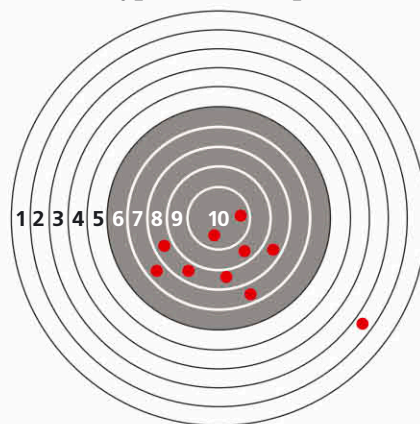


Рис. 5.9

450

Жалобы на опоздания электричек, поступившие в диспетчерскую службу станции Семафорово в течение недели, позволили составить диаграмму частот по опозданиям за неделю (рис. 5.10). Определите среднее число опозданий за неделю и стандартное отклонение.

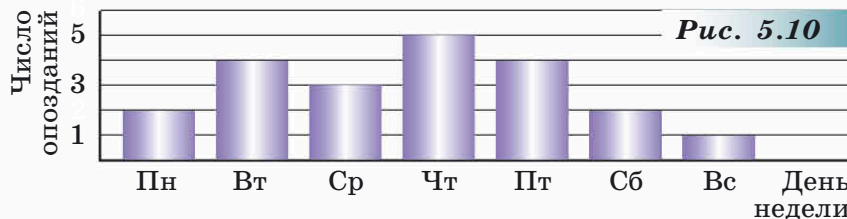


Рис. 5.10

451

В таблице указано число книг, прочитанных несколькими ребятами за летние каникулы. Для данного ряда вычислите среднее арифметическое и стандартное отклонение. Назовите имена тех ребят, для которых модуль разности между количеством прочитанных ими книг и средним арифметическим превышает стандартное отклонение.

Имя	Аня	Витя	Игорь	Оля	Петя	Катя	Лена	Саша
Число книг	8	10	6	1	0	7	5	3

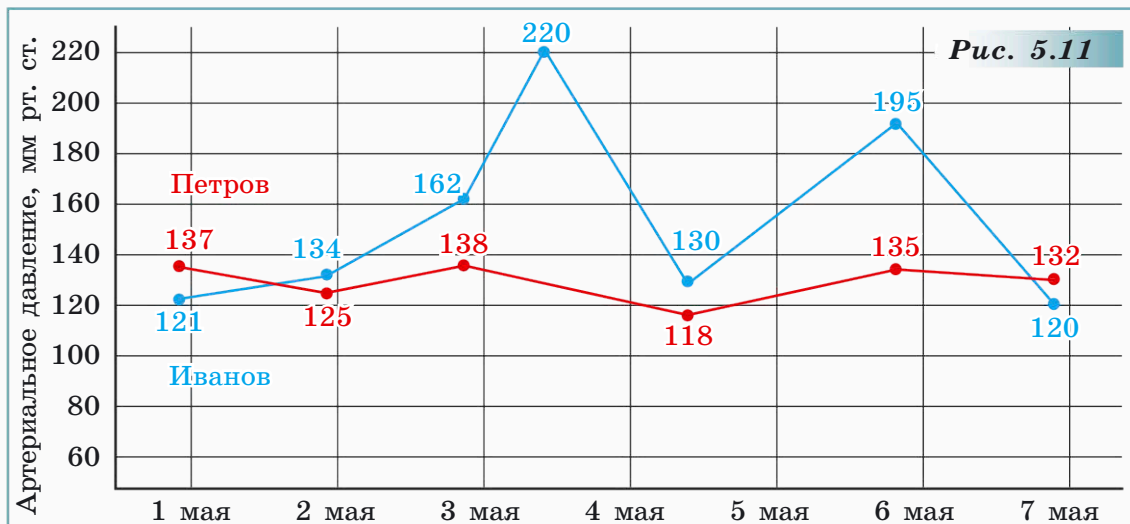
452

На стройку с кирпичного завода привезли 20 упаковок кирпича. Чтобы проверить качество партии, из каждой упаковки вытащили случайным образом по кирпичу и замерили длину каждого. Ниже представлены полученные величины (в см): 25,5; 25,1; 26,3; 25,3; 24,8; 24,2; 25,1; 24,6; 25,2; 25; 25,5; 24,7; 24,9; 25,5; 24,6; 25,1; 24,4; 24,8; 24,1; 25,3.

- Определите среднюю длину кирпича.
- Найдите величину стандартного отклонения длины кирпича от средней.
- Каков процент кирпичей, длина которых отличается от средней больше чем на 0,2 см? больше чем на величину стандартного отклонения?

453

Пациенты Иванов и Петров измеряли артериальное давление в течение недели. На графиках (рис. 5.11) представлены результаты измерений. У кого из пациентов есть проблемы с артериальным давлением? По каким статистическим показателям вы сделали этот вывод?



АНАЛИЗИРУЕМ, ИССЛЕДУЕМ, ДОКАЗЫВАЕМ

454

МАТЕМАТИКА ВОКРУГ НАС Найдите размах и стандартное отклонение своих отметок по алгебре за год. Проанализируйте полученный результат.

455

Для службы в Президентском полку отбирают призывников с ростом не менее 175 см и не более 190 см. Есть две группы призывников, рост которых: первая группа — 165 см, 170 см, 173 см, 182 см, 195 см; вторая группа — 166 см, 175 см, 175 см, 176 см, 178 см. Сколько призывников из каждой группы подходят для службы в Президентском полку? Сравните эти группы, вычислите для каждой стандартное отклонение.

456

В лаборатории две группы мышей, их масса (в граммах) по группам указана ниже.

Группа А: 26, 25, 33, 21, 26, 22, 29, 31, 29, 32.

Группа В: 34, 21, 33, 31, 24, 32, 28, 32, 30, 26.

Для ряда данных каждой группы вычислите среднее арифметическое и стандартное отклонение. Выберите группу, для которой верно высказывание:

- а) средняя масса мышей в этой группе выше, чем в другой;
- б) для этой группы вероятность того, что случайным образом выбранная мышь имеет массу, близкую к максимальному, выше, чем для другой группы;
- в) для этой группы вероятность того, что случайным образом выбранная мышь имеет массу, близкую к среднему значению, выше, чем для другой группы.

457

МАТЕМАТИКА ВОКРУГ НАС Спортивные аналитики оценивают футбольные команды по некоторому набору параметров, например по количеству забитых и пропущенных голов, голевых моментов и т.п. Чем меньше у команды стандартное отклонение по каждому параметру, тем более сбалансированной является команда. Чем больше стандартное отклонение, тем менее она сбалансирована, например, у команды сильное нападение, но слабая защита. Найдите в СМИ необходимую информацию и проанализируйте сбалансированность команд, занявших на последнем чемпионате России по футболу первые три места. (Аналогичное задание можно выполнить и для других видов спорта: баскетбола, хоккея и пр.) Использование среднеквадратического отклонения параметров команды позволяет оценить сильные и слабые стороны команд, а значит, и выбираемые способы борьбы.



458

Что можно сказать о ряде чисел, в котором:

- а) размах равен 0;
- б) дисперсия равна 0?

459

Докажите следующие утверждения:

- а) в любом ряду данных сумма отклонений данных от их среднего арифметического равна 0;
- б) дисперсия любого ряда данных не отрицательна;
- в) если каждое число ряда данных увеличить на одно и то же число, то дисперсия не изменится.

460

ЗАДАЧА-ИССЛЕДОВАНИЕ

- 1) Дан ряд чисел: $x_1; x_2; \dots; x_n$, среднее арифметическое которого равно a . Каждое число ряда увеличили в 10 раз. Как изменится его среднее арифметическое? Что произойдет с размахом? дисперсией? стандартным отклонением?
- 2) Сформулируйте полученный результат в общем виде: «Если каждое число ряда умножить на одно и то же число k , то...».
- 3) Ответьте на вопрос следующей задачи, используя утверждения из пункта 2: Ребятам было поручено провести статистическое исследование роста одноклассников. Коля записал рост ребят в сантиметрах: 162; 181; 179; ..., а Оля — в метрах: 1,62; 1,81; 1,79; Затем они подсчитали средний рост, дисперсию и стандартное отклонение. Коля получил соответственно 172, 81 и 9. Какие результаты получила Оля?

5.4

ВЫ УЗНАЕТЕ:

Как оценить частоту появления события, если известна его вероятность.

Русская школа теории вероятностей родилась в XIX в. трудами П.Л. Чебышёва, ставшего её основателем, и укрепилась работами его учеников — А.А. Маркова и А.М. Ляпунова. В свою очередь, они были учителями Андрея Николаевича Колмогорова, который сформулировал аксиоматическую теорию вероятностей.

Колмогоров считал, что ценность теории вероятностей основана на том, что «случайные явления, рассмотренные совокупно и в больших масштабах, создают неслучайный порядок».

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Чему равен процент бракованных деталей в Примере 1?
- Используя Пример 2, определите, сколько примерно жителей должно быть в городе, чтобы можно было ожидать, что около 1000 жителей родились 29 февраля?
- Что можно было бы сказать о числе рыб в озере из Примера 3, если бы при повторном вылове не попалась ни одна помеченная рыба?

СТАТИСТИЧЕСКОЕ
ОЦЕНИВАНИЕ И ПРОГНОЗ

С ростом числа экспериментов частота наблюдаемого события стремится к вероятности этого события. Значит, по известной вероятности можно прогнозировать частоту появления интересующего нас события в будущем.

ТРИ ПРИМЕРА СТАТИСТИЧЕСКОГО ОЦЕНИВАНИЯ

Пример 1. «Контроль качества». При проведении контроля качества продукции среди 1000 случайным образом отобранных деталей оказалось 6 бракованных. Сколько бракованных деталей следует ожидать в партии товара из 30 000 деталей?

Оценим вероятность того, что деталь бракованная. Приблизённо она будет равна частоте этого события: $P = \frac{6}{1000} = 0,006$. Такую частоту следует ожидать и в будущем. Поэтому среди 30 000 деталей можно ожидать около $30\,000 \cdot 0,006 = 180$ бракованных.

Пример 2. «День рождения». Население города N составляет около 300 000 жителей. У скольких жителей этого города день рождения может приходиться на 29 февраля?

29 февраля бывает только в високосном году — один раз в четыре года. Значит, это лишь один на $3 \cdot 365 + 366 = 1461$ дней. Следовательно, для случайным образом выбранного человека день его рождения попадает на 29 февраля с вероятностью $P = \frac{1}{1461} = 0,00068$.

Это значит, что среди 300 000 жителей города N следует ожидать около $300\,000 \cdot 0,00068 \approx 200$ человек, которым доводится праздновать свой день рождения раз в 4 года.

На прогнозировании частоты основан один интересный способ определения численности популяций, используемый в биологии.

Пример 3. «Численность популяции». Из озера выловили 106 рыб, которых пометили и отпустили обратно в озеро. Через неделю произвели повторный вылов — на этот раз поймали 98 рыб, среди которых оказалось 6 помеченных. Этот результат позволил вычислить, сколько приблизительно рыб живёт в озере.

Обозначим неизвестную нам численность рыб в озере через N . Тогда, с одной стороны, вероятность поймать помеченную рыбу в озере равна $\frac{106}{N}$. С другой стороны, эта вероятность должна приблизительно равняться частоте появления помеченных рыб во втором улове: $\frac{106}{N} \approx \frac{6}{98}$. Отсюда, $N \approx \frac{106 \cdot 98}{6} \approx 1700$. Заметим, что в статистике используют более тонкие вероятностные методы. Но для получения грубых оценок этот метод вполне допустим.

УПРАЖНЕНИЯ

461

а) При проверке выбранных случайным образом 200 лампочек из партии в 2500 штук 2 лампочки оказались неисправными. Сколько неисправных лампочек можно ожидать в этой партии?

б) При проверке выбранных случайным образом 100 пачек печенья из партии в 1500 пачек вес трёх пачек оказался ниже заявленного. Сколько таких пачек можно ожидать в этой партии?

462

При изучении состояния знаний девятиклассников была обследована представительная выборка в 3000 учащихся. За контрольную работу оценку «5» получили 660 учащихся. Какова вероятность того, что наудачу выбранный девятиклассник выполнит эту контрольную работу на «5»?

463

Частота попадания в мишень в тире в среднем составляет 0,6. За день около 100 пуль улетели «в молоко». Сколько всего выстрелов было сделано?

Неверно!

Пётр уже 10 раз подряд участвовал в еженедельной лотерее, но ещё ни разу не выиграл. Однако он продолжает играть, утверждая: «Лотерея — случайная игра, иногда выигрываешь, иногда проигрываешь. Я уже долго проигрывал, поэтому уверен, что выиграю в одном из следующих розыгрышей». Объясните, почему это утверждение неверно.

464

МАТЕМАТИКА ВОКРУГ НАС По статистике проведённых соревнований вероятность поражения мишени биатлонистом Стрельцовым в положении стоя равна 77 %, в положении лёжа — 92 %. Сколько промахов можно ожидать в гонке, в которой биатлонист сделает по 10 выстрелов в каждом положении?

465

Абонент забыл последнюю цифру в номере телефона и набирает её наугад, не повторяясь. Сколько попыток в худшем случае ему придётся сделать? Что более вероятно — набрать нужный номер с первой попытки или со второй?

466

В коробке 100 шаров белого и чёрного цвета. Из неё 60 раз вынимали шар, возвращая его обратно. При этом белый шар появился в 18 случаях. Сколько предположительно белых шаров в коробке?

467

МАТЕМАТИКА ВОКРУГ НАС В Москве около 12 млн жителей. У скольких жителей Москвы день рождения может приходиться на 1 января?

468

Из озера выловили 64 рыбы, всех их пометили и отпустили обратно в озеро. Через неделю произвели повторный вылов; на этот раз поймали 50 рыб, среди которых оказалась одна помеченная. Какова вероятная численность рыб в озере? Что можно было бы сказать о количестве рыб, живущих в озере, если бы среди выловленных рыб не было ни одной помеченной?



5.5

ВЫ УЗНАЕТЕ:

О новых видах комбинаций — размещениях и сочетаниях.

ВСПОМНИТЕ:

- Что такое факториал?
- Формулу числа перестановок.

Формула числа повторений:

$$P_n = n!$$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n.$$

Число размещений из n по k читают так:

A_n^k — «а из эн по ка»;

число сочетаний из n по k читают так:

C_n^k — «це из эн по ка».

РАЗМЕЩЕНИЯ И СОЧЕТАНИЯ

Некоторые комбинации, которые часто встречаются при решении комбинаторных задач, имеют специальные названия. Вы знаете, что каждое расположение заданных элементов в определённом порядке называют перестановкой. Познакомимся ещё с двумя комбинациями.

ВАЖЕН ЛИ ПОРЯДОК? Решим две похожие задачи.

Задача 1. В классе 25 учеников. Сколькими способами можно выбрать старосту и его заместителя?

Ответ на этот вопрос, как вы знаете, можно получить с помощью правила умножения. Для выбора старосты имеется 25 способов, а его заместителя (при каждом выборе старосты) — 24 способа. Значит, всего имеется $25 \cdot 24 = 600$ способов.

Задача 2. В классе 25 учеников. Сколькими способами можно выбрать двух дежурных?

В отличие от предыдущей ситуации дежурные в каждой паре равноправны, значит, число способов в данном случае оказывается вдвое меньшим: $\frac{25 \cdot 24}{2} = 300$.

Давайте разберёмся, почему в таких похожих задачах мы получаем разные ответы. Пусть в обеих ситуациях выбрали учеников A и B . Когда выбирают старосту и его заместителя, то пара AB , где A — староста, B — его заместитель, и пара BA , в которой B — староста, A — заместитель, — это разные варианты выбора. Здесь важны не только элементы, из которых составляется пара, но и их порядок. А когда выбирают дежурных, то порядок не важен. Пары AB и BA — это, по сути, один и тот же вариант выбора, то есть каждые две пары, отличающиеся только порядком элементов, заменяются в данном случае одной. Вот почему в задаче 2 вариантов вдвое меньше.

В общем виде эти задачи выглядят так: требуется найти число способов, которыми из множества, содержащего n элементов, можно выбрать k элементов. Прежде всего из условия задачи необходимо понять, важен ли порядок в этом наборе из k элементов или нет.

Если по смыслу задачи порядок важен (как в случае со старостой и заместителем), то говорят о *нахождении числа размещений из n по k* , обозначают: A_n^k . Два размещения считаются различными, если они различаются или самими элементами, или порядком их расположения.

Если порядок элементов не важен (как в случае с парой дежурных), то говорят о *нахождении числа сочетаний из n по k* ; обозначают: C_n^k . Два сочетания считаются различными, только если они различаются своими элементами.

КАК РАЗЛИЧИТЬ ЭТИ КОМБИНАЦИИ? При решении задач на нахождение числа размещений и числа сочетаний главное — научиться различать эти две комбинации.

Пример 1. В турнире участвуют 12 команд. Сколькими способами они могут занять пьедестал победителей?

Ясно, что для каждой команды очень важно не только войти в призовую тройку, но и занять как можно более высокое место (а ещё лучше стать чемпионом). Конечно, в такой ситуации порядок важен. Поэтому, если, например, призёрами стали команды A , B и C , то все возможные тройки, различающиеся только порядком этих команд, т.е. ABC , ACB , BAC , BCA , SAB и SCA , — это разные варианты. Таким образом, для ответа на вопрос задачи нужно найти A_{12}^3 — число размещений из 12 по 3. Воспользовавшись правилом умножения, получим $A_{12}^3 = 12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320$.

Пример 2. В турнире участвуют 12 команд. Цель первого этапа — определение тройки финалистов. Сколькими способами могут быть отобраны три команды, вышедшие в финал турнира?

Понятно, что любая команда на этом этапе турнира ставит одну цель — войти в финальную тройку, а какое место она займёт на этом предварительном этапе — значения не имеет. Таким образом, в этом случае порядок при выборе троек не важен, т.е. мы должны найти C_{12}^3 — число сочетаний из 12 по 3.

Для этого можно использовать результат предыдущей задачи. Шесть вариантов выбора, которые мы рассмотрели выше, отличающиеся только порядком элементов, теперь должны рассматриваться как один набор из трёх элементов: A , B , C . Отсюда ясно, что в данном случае общее число вариантов должно быть в 6 раз меньше:

$$C_{12}^3 = \frac{1320}{6} = 220.$$

Обратите внимание: число 6, на которое мы разделили результат первой задачи, — это количество перестановок из трёх элементов ($P_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$). Поэтому решение можно записать так:

$$C_{12}^3 = \frac{A_{12}^3}{P_3}.$$

Пример 3. На общем собрании жильцов дома нужно выбрать домовый комитет в составе трёх человек. В списке кандидатов оказалось восемь человек. Сколько есть способов для выбора домового комитета?

В задаче ничего не сказано о распределении обязанностей между членами комитета, а значит, их следует считать равноправными. Поэтому нужно найти C_8^3 :

$$C_8^3 = \frac{A_8^3}{P_3}.$$

Существуют формулы числа размещений и числа сочетаний, которые записываются с помощью $n!$

Символы для обозначения числа размещений и числа сочетаний выбраны неслучайно, а по первым буквам французских слов *Arrangement* — размещение, расстановка, приведение в порядок и *Combinaison* — сочетание, комбинация. Термин «сочетание» впервые встречается у Паскаля (1665), а термин «размещение» — у Якоба Бернулли (1713).

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k}.$$

Формула числа размещений:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Формула числа сочетаний:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Объясните, чем различаются задачи 1 и 2.
- Приведите пример задачи, аналогичной задаче 1; задаче 2.
- Доведите решение задачи из примера 3 до числового ответа.

УПРАЖНЕНИЯ

РАЗМЕЩЕНИЯ ИЛИ СОЧЕТАНИЯ?

Выясните, какие комбинации рассматриваются в задаче — размещения или сочетания, и ответьте на вопрос (№ 469–471):

469

- а) Сколькими способами можно сшить трёхцветный флаг с тремя горизонтальными полосами, если имеется материал 12 различных цветов?
б) Сколькими способами можно выбрать 3 краски из имеющихся 12 различных красок?

470

- а) В команде 10 спортсменов. Сколькими способами тренер может выбрать четырёх спортсменов, чтобы расставить их по этапам эстафеты 4×100 м?
б) В команде 10 спортсменов. Сколькими способами тренер может выбрать четырёх спортсменов, которые побегут стометровку?

471

- а) В шахматном кружке занимаются 15 человек. Сколькими способами тренер может набрать из них команду для игры на первой, второй, третьей, четвёртой, пятой досках в турнире?
б) В шахматном кружке занимаются 15 человек. Сколькими способами тренер может набрать из них команду из 5 человек для игры в турнире?

ИСПОЛЬЗУЕМ ФОРМУЛЫ

Запишите решение задачи, используя обозначения для числа перестановок, размещений и сочетаний; для вычислений воспользуйтесь соответствующими формулами (№ 472–477):

472

МАТЕМАТИКА ВОКРУГ НАС Сколькими способами можно зачеркнуть 5 номеров из 36 в карточке «Спортлото: 5 из 36»?

473

На плоскости отмечено 4 точки. Сколькими способами их можно обозначить буквами латинского алфавита?
(Для справки. В латинском алфавите 26 букв.)

474

На плоскости отмечено 10 точек так, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

475

Сколькими способами из 30 учеников математического класса можно выбрать двоих для участия в математической олимпиаде? троих? четверых?

476

Сколькими способами можно выбрать 2 яблока и 3 груши из вазы с фруктами, в которой лежит 7 яблок и 5 груш?

477

В футбольной секции 24 человека, среди которых есть вратари Жёня и Серёжа. Сколькими способами можно набрать футбольную команду (11 человек) так, чтобы в команду попал только один из этих вратарей?

478

Используя формулы для числа размещений и числа перестановок, докажите формулу для нахождения числа сочетаний.

ОПРЕДЕЛЯЕМ ВЕРОЯТНОСТЬ СОБЫТИЯ

479

МАТЕМАТИКА ВОКРУГ НАС а) Пять друзей: Коля, Саша, Ваня, Петя и Толя — достали два билета на новый фильм. Кто пойдёт в кино, решили определить с помощью жребия. Какова вероятность того, что это будут Коля и Саша?
 б) Кодовый замок имеет 10 кнопок с цифрами от 0 до 9. Он открывается одновременным нажатием трёх определённых кнопок. Какова вероятность того, что человек, не знающий кода, откроет замок с первого раза?

480

В урне находится 4 синих и 2 красных шара, одинаковые на ощупь. Не глядя из неё вынимают 3 шара. Какова вероятность того, что все они синие?

481

Девять карточек пронумерованы числами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Из этих карточек четыре наугад взятых карточки выложили в ряд. Какова вероятность того, что получившееся четырёхзначное число делится на 5?

482

ЗАДАЧА-ИССЛЕДОВАНИЕ

Вы, наверное, удивитесь, что число сочетаний из n по k обозначается так же, как и элемент треугольника Паскаля, расположенный в n -й строке на месте с номером k . Это не случайно, ведь это те же самые числа, они же — биномиальные коэффициенты.

1) Найдите по комбинаторной формуле, связывающей число сочетаний, размещений и перестановок, следующие сочетания: C_6^1 , C_6^2 , C_6^3 , C_6^4 , C_6^5 . Сравните их с числами, стоящими в шестой строке треугольника Паскаля.

2) Найдите C_7^4 , C_8^4 , C_{10}^4 по формуле и сравните с результатом, полученным с помощью треугольника Паскаля.

3) Треугольник Паскаля можно задать так:

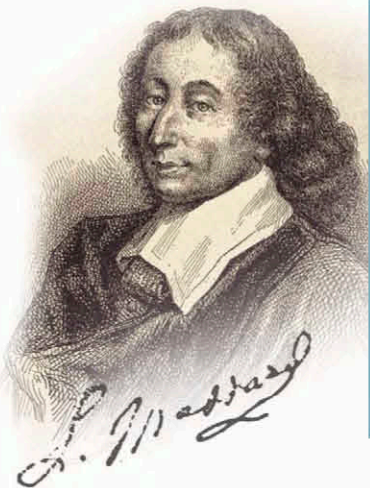
$C_n^0 = 1$, $C_n^n = 1$ (это границы треугольника),

$C_{n+1}^m = C_n^{m-1} + C_n^m$ (это позволяет найти число $(n+1)$ -й строки по двум числам n -й строки).

Воспользовавшись формулой, найдите числа, стоящие в 7-й строке треугольника.

4) Докажите формулу из п. 3, воспользовавшись формулой числа сочетаний.

5) Докажите формулу $C_n^m = C_n^{n-m}$. Как расположены числа C_n^m и C_n^{n-m} в треугольнике Паскаля?



							№ строки
			1				0
		1		1			1
		1	2	1			2
	1	3	3	1			3
	1	4	6	4	1		4
	1	5	10	10	5	1	5
1	6	15	20	15	6	1	6
.....							7

УЗНАЙТЕ БОЛЬШЕ

ВЕРОЯТНОСТЬ И КОМБИНАТОРИКА

Вы уже не раз решали задачи на вычисление вероятности, находя число возможных и благоприятных событий с помощью приёмов комбинаторики. Решим ещё несколько таких задач, рассмотрев некоторые новые ситуации.

Пример 1. Из коробки, в которой лежат два белых и два чёрных шара, не глядя вынимают два шара. Найдём вероятность двух событий — событие A : вынуты два шара одного цвета; событие B : вынуты два шара разных цветов.

Напомним, что при определении числа возможных исходов нужно различать все шары, участвующие в эксперименте (а не только их цвета). Поэтому пронумеруем шары, при этом для удобства белым шарам присвоим номера 1 и 2, а чёрным — 3 и 4.

Найдём число возможных исходов с помощью перебора; всего их шесть: 12, 13, 14, 23, 24, 34.

Для события A благоприятны два исхода: 12 и 34. Значит, вероятность вынуть два шара одного цвета равна $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Для события B благоприятными будут остальные четыре исхода, вероятность наступления этого события равна $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

События A и B , рассмотренные в задаче, противоположны: исходами, благоприятными для события B , являются все исходы, неблагоприятные для события A . Значит, если из n исходов эксперимента m исходов благоприятны для A , то остальные $n - m$ исходов благоприятны для B . Тогда $P(A) = \frac{m}{n}$, а $P(B) = \frac{n - m}{n}$, или $P(B) = 1 - P(A)$.

Пример 2. Вы получаете 6 карт из колоды, в которой 36 карт. Какова вероятность того, что среди них есть хотя бы один туз?

Во всех задачах, где в условии присутствует фраза «хотя бы один...», проще найти ответ через вероятность противоположного события — «ни один...».

Найдём вероятность события, противоположного рассмотренному в задаче, — «среди шести вынутых карт нет ни одного туза»:

$$\frac{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27}{36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31} \approx 0,465.$$

Значит, вероятность противоположного события — «среди шести карт есть хотя бы один туз» — равна $1 - 0,465 = 0,535$.

Пример 3. У игрока A в коробке 25 белых и 50 красных шаров, у игрока B в коробке 40 белых и 80 красных шаров. Игроки одновременно не глядя вынимают из коробки по одному шару. Победителем в игре становится тот, кто первым вынет из своей коробки белый шар. Если они вынимают белый шар одновременно — ничья.

Игрок A считает, что эта игра несправедливая, так как у него в коробке меньше белых шаров. Игрок B считает, что эта игра несправедливая, так как у него в коробке больше красных шаров. Справедлива ли на самом деле эта игра?

Прежде всего заметим, что в этой игре оговорены не все условия. После каждого тура игры можно возвращать шар в свою коробку, а можно не возвращать, и от этого неоговорённого условия зависит оценка шансов на победу каждого из игроков.

Рассмотрим оба варианта игры.

Пусть после каждого тура шары возвращаются в коробки. Тогда легко понять, что на каждом шаге вероятность вынуть белый шар каждым из игроков одинакова и равна $\frac{1}{3}$. Значит, в этом варианте правил шансы игроков на победу в игре равны, т.е. игра справедливая.

А вот если после каждого тура вынутый шар не возвращается в свою коробку, то на каждом шаге соотношение белых и красных шаров у каждого из игроков меняется. Этой игре соответствует гораздо более сложная вероятностная модель. Попробуем в ней разобраться.

Понятно, что и в этом варианте в начале игры, на первом шаге, вероятность вынуть белый шар для каждого из игроков одинакова и равна $\frac{1}{3}$. Но если в первом туре ни один из игроков не вынул белый шар, то во втором туре у игрока А больше шансов выиграть, так как в его коробке соотношение шаров станет равным 25 : 49, а у игрока В — 40 : 79. И после каждого шага это неравенство шансов только усугубляется. (Убедитесь в этом с помощью калькулятора, выяснив, как меняются вероятности вынуть белый шар для каждого из игроков с каждым следующим шагом, вычислив их для первых трёх-четырёх шагов.)

Точный расчёт соотношения шансов на выигрыш в игре в ситуации, когда шары после каждого тура не возвращаются в коробки, вы выполнить пока не можете — это требует использования более сложных формул теории вероятностей, а также весьма громоздких вычислений, для которых обычно используется компьютер. Но тем не менее наших знаний и представлений оказалось достаточно, чтобы ответить на вопрос, справедливы ли правила этой игры, и обосновать своё мнение.

- 1 Кубик бросают два раза. Какова вероятность того, что оба раза выпадет одинаковое число очков? разное число очков?
- 2 Одновременно бросают 2 кубика: белый и чёрный.
 - а) Сколько возможных исходов у этого эксперимента?
 - б) Какова вероятность того, что число, выпавшее на белом кубике, больше числа, выпавшего на чёрном кубике?
 - в) Какова вероятность того, что число, выпавшее на белом кубике, не превосходит числа, выпавшего на чёрном кубике?
- 3 Одновременно бросают 3 монеты.
 - а) Сколько возможных исходов у этого эксперимента?
 - б) С какой вероятностью все монеты упадут на одну сторону?
 - в) С какой вероятностью выпадет один или два орла?
- 4 Из колоды в 36 карт одну за другой вытягивают две карты. Какова вероятность того, что они одного цвета, если выбор осуществляется без возвращения? если выбор осуществляется с возвращением?
- 5 В шкафу находится 3 пары ботинок различных размеров. Из них случайным образом выбирают 2 ботинка. Найдите вероятность того, что они парные.
- 6 Номер автомашины состоит из трёх цифр (не все из которых — нули). Какова вероятность того, что номер первой встретившейся вам автомашины будет содержать хотя бы одну цифру 3?

ПОДВЕДЁМ ИТОГИ

Характеристики разброса ряда данных: *размах*, *дисперсия*, *стандартное отклонение*.

Среднее арифметическое квадратов отклонений от среднего значения называется *дисперсией*.

Квадратный корень из дисперсии называется *стандартным* (или *средним квадратичным*) *отклонением*: $\sigma = \sqrt{D}$.

Дан ряд чисел: 1, 2, 3, 4, 5.
Размах ряда равен $5 - 1 = 4$.

Найдём дисперсию ряда.

Среднее арифметическое равно 3.

$$D = \frac{(3-1)^2 + (3-2)^2 + (3-3)^2 + (3-4)^2 + (3-5)^2}{5} = \frac{4 + 1 + 0 + 1 + 4}{5} = 2.$$

Стандартное отклонение данного ряда равно $\sqrt{2}$.

- 1 Какие графические иллюстрации используются в статистических исследованиях рядов данных? Как называется графическая интерпретация интервального ряда?
- 2 Используя диаграмму на рисунке 5.3, выполните задания:
а) постройте по данным диаграммы полигон частот;
б) с помощью полигона определите среднее количество комнат в квартире.
- 3 Вернитесь к задаче 442 (п. 5.3) и постройте гистограмму частот для 2015 г.
- 4 В результате обследования представительной выборки пятиклассников региона оказалось, что 60 % учащихся выполнили проверочную работу на «4» или «5». Сколько таких отметок можно ожидать при выполнении этой работы в регионе, если всего в пятых классах региона обучается 1200 учащихся?
- 5 Из партии телевизоров в 800 штук отдел контроля подверг проверке 100 штук. Оказалось, что 3 телевизора имеют дефекты. Сколько телевизоров с дефектами можно ожидать в этой партии?
- 6 Для приведённого ниже ряда отметок, полученных в течение четверти, вычислите стандартное отклонение.
Отметки: 5, 4, 4, 5, 3, 2, 5, 4, 4, 5.

ОТВЕТЫ

Глава 1

10. 2. в) $2\pi - 6$; г) $2 - \frac{\pi}{2}$. 3. в) $\sqrt{7} - 2$; г) $\sqrt{26} - 5$. 24. б) $A(\frac{2}{3})$, $B(\frac{2\pi}{3})$.
 25. а) $A(-0,4905)$, $B(-0,409)$, $C(0,409)$, $D(\frac{4}{9})$. 43. а) $a + b > 20$ и $a + b > 18$;
 б) $ab > 150$; $ab > 100$. 45. а) $11 < P < 14$; $4 < S < 7,5$; б) $30 < P < 34$; $15 < S < 24$.
 48. $1,2 \text{ см}^2 < S < 1,3 \text{ см}^2$; $5,3 \text{ см} < P < 5,4 \text{ см}$. 57. а) $(-\infty; -5]$; б) $(-\infty; 2]$; в) $(7; +\infty)$;
 г) $[-28; +\infty)$; д) $(7; +\infty)$; е) $(-\infty; \frac{5}{4})$; ж) $(-\infty; -6\frac{1}{3})$; з) $(0; +\infty)$; и) $[33; +\infty)$.
 58. а) $x < 3$; б) $x > -2$; в) $x > -5$; г) $x \geq -6,6$; д) $x \leq 11$; е) $x < 2$. 59. а) $(7; +\infty)$;
 б) $(-\infty; 3)$; в) $(-\infty; 8]$; г) $(-\infty; 4]$; д) $(-20; +\infty)$; е) $(15; +\infty)$. 61. в) $\emptyset$;
 г) $(-\infty; +\infty)$. 62. а) $x < 8$; б) $x > 5$; в) $x \geq -2$; г) $x \leq 15$; д) $x \geq 2$; е) $x > 5$.
 63. а) $(-1; 3]$; б) $[-3; -2,5]$; в) $[-\frac{1}{2}; 0]$; г) $[-15; 2]$. 66. а) Не более 62 мешков;
 б) не более 262 мин. 72. а) При $a > 1\frac{2}{3}$; б) при $a < -0,2$. 79. а) $(-\infty; -3)$; б) $\emptyset$;
 в) $(-\infty; -1)$; г) $[2; 7]$. 80. а) $(-\infty; 2)$; б) 2; в) $[-2; 4)$. 82. а) $(-\frac{1}{3}; 4)$; б) $[-4,5; -1,5]$;
 в) $(6; 30)$; г) $(-11; 9)$; д) $[-1,5; 7,5]$; е) $(1; 9)$. 83. а) $(-\infty; 3)$; б) $(-\infty; -3)$;
 в) $(-1; +\infty)$. 84. а) $(-1; 0)$; б) $(-\infty; -0,4)$; в) $(-1; 2,5)$; г) $(-3; 2]$. 85. Система
 имеет решения при $c \leq -0,4$; имеет единственное решение при $c = -0,4$; не
 имеет решений при $c > -0,4$. 109. а) Значение массы Юпитера дано с точностью
 до 10^{24} кг с относительной погрешностью до 0,05 %. 111. $l = 5 \pm 0,05 \text{ см}$.

Узнайте больше

Периодические и непериодические бесконечные десятичные дроби

1. а) 0,(4); б) 0,(27); в) 0,(461538); г) 0,208(3). 3. а) $0,(7) > 0,(71)$;
 б) $8,(215) > 8,2(15)$; в) $0,(3) = \frac{1}{3}$; г) $1,4 < 1,(4)$. 5. а) $0,(6) = \frac{2}{3}$; б) $0,(12) = \frac{4}{33}$;
 в) $1,(135) = 1\frac{5}{37}$; г) $0,2(36) = \frac{13}{55}$; д) $2,31(4) = 2\frac{283}{900}$. 6. а) $\frac{1}{9}$; б) $\frac{10}{99}$; в) $\frac{1}{99}$.

Ещё о средних

1. 29 км/ч.

Глава 2

114. 2) Да, в точках $(-1; 10)$ и $(6; 10)$. Нет. 129. 2) $a = -\frac{1}{4}$. 132. а) $(-1; 0,5)$ и
 $(2; 2)$; б) $(-2; 8)$ и $(1; 2)$; в) $(1; -2)$. 141. а) $y_{\text{наиб.}} = -3$, $y_{\text{наим.}} = 4$; б) $y_{\text{наиб.}} = 3$,
 $y_{\text{наим.}} = 0$. 146. а) $y = (x - 2)^2$, $y = (x + 2)^2$; б) $y = (x + 6)^2$, $y = (x + 2)^2$.
 163. а) $A = 4\pi - \pi x^2$; б) $A = 4\pi x - \pi x^2$. 164. $\approx 11,5 \text{ м}$. 166. а) $(-7; 3)$;
 $(-\infty; -7) \cup (3; +\infty)$; г) $x < -10$, $x > 0$; $-10 < x < 0$. 167. а) $(-\infty; -5) \cup (-2; +\infty)$;
 б) $(-1; 7)$; в) $(-2; 2)$; г) $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$. 168. в) $[0; 0,5]$; г) $(-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$.
 169. а) $\emptyset$; в) $(-\infty; +\infty)$. 170. а) $(-5; 5)$; б) $(-\infty; -0,5] \cup [0,5; +\infty)$;
 е) $[0; 1]$; и) $(-\infty; -3] \cup (3; +\infty)$; л) $(-10; 10)$; м) $(-8; 8)$. 171. б) $(-\infty; -\frac{2}{3}) \cup (3; +\infty)$;

г) $(-\infty; -1) \cup (-\frac{1}{6}; +\infty)$. 172. а) $(-2,5; 0,5)$; б) $(-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$. 173. в) $(-\infty; -4] \cup [-3; +\infty)$; е) $[-1,5; 0]$. 174. б) $\frac{1}{4} < x < 1$. 175. а) $(-\infty; 5) \cup (10; +\infty)$. 176. а) $0 < x < -1 + \sqrt{3}$; б) $x < 1 - \sqrt{2}$. 177. а) $[-2; -0,2] \cup [1; 2]$; б) $[\frac{1}{3}; 1]$. 178. а) $(0; 3]$; в) $\emptyset$; д) $(-\infty; -5) \cup (0; +\infty)$; е) $(-\infty; -1) \cup (-1; 1]$. 179. б) $[-2; 4]$; г) $[-\sqrt{6}; \sqrt{6}]$. 180. а) $[-3; 0) \cup (0; 3]$; д) $[-2; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; 2]$; е) $(-\infty; -2) \cup (-2; -1] \cup [1; 2) \cup (2; +\infty)$. 183. При $b < -4$, $b > 4$. 184. При $b \leq -8$, $b \geq 8$. 185. $-2, -1, 0, 1$ и 2 . 186. $(-1; 0) \cup (0; 1)$. 187. -1 и 1 . 190. б) $(-\infty; -1] \cup [1; 5]$; в) $[-6; 1] \cup [7; +\infty)$. 191. б) $[-4; 3]$; в) $(-1; 0) \cup (3,5; +\infty)$. 192. б) $(-2; 0) \cup (1; 3)$. 193. а) $(-\infty; -1) \cup (0; 2) \cup (4; +\infty)$. 194. б) $(-\infty; -3] \cup [0; 5]$; в) $[-8; -4] \cup [1; +\infty)$. 195. а) $(-\infty; 1] \cup [2; 4]$; в) $(-\infty; 1] \cup [3; 4]$. 196. б) $(-0,5; 3)$.

Глава 3

202. а) $x \neq 0$ и $x \neq -1$; б) $x \neq 0$ и $x \neq 1$; в) $x \neq -4$, $x \neq 5$ и $x \neq \pm 3$; г) $x \neq 0$, $x \neq 1$ и $x \neq -\frac{1}{2}$. 203. г) Множество пар $(x; y)$, в которых $x \neq 0$ и $y \neq 0$; д) множество всех пар $(x; y)$, кроме пары $(0; 0)$. 209. а) $-\frac{4xy}{x-y}$; б) $\frac{1}{x-y}$; в) $x+y$. 210. в) $\frac{ab+bc+ac}{a+b+c}$. 211. а) $\frac{a^2+ac}{c}$; б) $\frac{a}{a^2-b^2}$; в) 2 ; г) $\frac{1}{y}$; д) $\frac{1}{y}$; е) $\frac{y}{x}$. 213. 1) $\frac{2x^2y}{x^2-y^2}$; 2) $\frac{2xy^2}{x^2-y^2}$; 3) $\frac{x^2y^2}{x^2-y^2}$; 4) $\frac{y}{2}$; 5) $\frac{2}{x}$. 214. а) $\frac{a}{a-3}$; б) $\frac{1}{a}$; в) $-\frac{a+2}{12}$; г) $\frac{a}{2-2a}$. 215. а) $\frac{2}{x-1}$; б) $\frac{1}{y+1}$; в) $\frac{1}{x^2-x-20}$. 216. 2) Наибольшее значение равно 4 ; оно достигается при $x = 0$ и $y = -2$. 232. $A_1 = B_2$, $A_2 = B_3$, $A_3 = B_1$. 238. а) $0; -2; 2$; б) 0 ; в) $0; 1$; г) $0; 1; 3$; д) $0; -9; 9$; е) $0; -3; 3$. 239. а) $-1; 1$; б) $\frac{1}{3}; -3; 3$; в) $-0,5$; г) $0,2$. 241. а) $(5; 0), (-2; 0), (2; 0)$; б) $(6; 0), (-\sqrt{8}; 0), (\sqrt{8}; 0)$. 242. а) $\pm 2; \pm \sqrt{2}$; б) $\pm \frac{1}{2}$; в) корней нет; г) $\pm \sqrt{3}$; д) 0 ; е) $0; -3; 3$. 243. а) Точки пересечения: $(-1; 0), (1; 0), (-3; 0), (3; 0)$; б) не пересекают; в) точки пересечения: $(-\sqrt{10}; 0), (\sqrt{10}; 0)$. 244. а) $(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$; б) $(x+3)(x-3)(x^2+5)$. 245. а) $1; 3,5$; б) -2 . 246. а) $\pm \sqrt{2}$; б) ± 2 . 247. а) $-4; 1$; б) $0; -1$; в) $-3; 2; -2; 1$; г) $1; 3; 2 \pm \sqrt{7}$. 253. а) $-5; 1$; б) $4; 5$; в) $-2; 6$; г) $-1; 2$; д) $\frac{1}{3}; 2$; е) $-6; 6$. 254. Таких чисел два: $2,5$ и $0,4$. 256. а) $-4; 3$; б) $0; 1$; в) $-0,5; -3$; г) $1; \frac{2}{3}$. 258. а) $-3; 0,5$; б) 5 ; в) $-0,5; 1,5$; г) $-1; 1\frac{2}{3}$. 259. а) -3 ; б) $\frac{1}{7}$; в) 2 ; г) корней нет. 260. а) $-1; 4$; б) $0,5; -18$; в) $6; 10$; г) -1 . 261. а) нет корней; б) 3 ; в) 2 ; г) $1; 7$. 263. а) $0; 2$; б) -1 ; в) 0 ; г) $0; 4$; д) 6 ; е) -3 . 266. а) -2 ; б) 6 ; в) нет корней; г) $-1; 1$. 267. а) $A(0; \frac{1}{2}), B(\frac{1}{2}; 0), C(2; 0)$; б) $A(-3; 0), B(0; -6), C(1; 0)$; в) $A(-4; 0), B(0; -1), C(-2; 0)$. 273. 14 км/ч. 274. 9 км/ч. 275. 9 км/ч. 276. 18 км/ч. 277. 50 км/ч. 291. б) $y = 1, z = -\frac{1}{3}$; в) $x = -3, y = -4$; г) $m = 10, n = 12$. 292. а) $(-3; 1)$; б) $(1; -4)$. 293. а) $(5; 7); (7; 5)$; б) $(-12; 1); (1; -12)$; в) $(-1; -2); (2; 1)$; г) $(10; 1); (1; 10)$; д) $(10; -6); (-10; 6)$; е) $(-1,25; 6,75); (2; -3)$. 294. д) $(3; 11); (-1\frac{2}{3}; 1\frac{2}{3})$; е) $(4,5; 1,125); (1; -1,5)$. 297. а) $(2; -6)$ и $(4; -4)$;

- б) (1; -4). 298. а) (0; 0); (-2; 4); б) (0; 0); (12; 4); в) (5; 2); (2,5; -0,5); г) (2; -3); (-1; 3). 299. а) (2; -2); (-2; 2); б) (5; -2); (-2; 5); в) (3; 2); (-3; -2). 300. а) (4; 3); (-4; 3); (4; -3); (-4; -3); б) (2; 1); в) (0,5; 1,5); (-0,5; -1,5); г) (-2; 4); (4; -2). 301. 2) а) (2; 6); (6; 2); б) (5; -15); (15; -5); в) (1; -2); (-2; 1). 302. а) (-4; 2); б) (15; -5); в) (-1; 3). 303. а) (5; 3); (-5; -3); б) (3; 1); (-3; -1); в) (2; 1); (-2; -1); г) (3,5; 1,5); (-3,5; -1,5). 305. 1) $y = 0,5x - 3$; 2) (6; 0), (0; -3). 306. 1) $y = \frac{1}{3}x - 3$; 2) (9; 0), (0; -3). 307. $y = 2x^2 - 3x + 1$. 308. а) $y = 2x^2 + 4x - 6$; (-3; 0) и (1; 0). 309. 1) Проходит через точку M и не проходит через точку N ; 2) (1; 4). 316. 6 рядов и 14 стульев. 317. 8 см и 6 см. 318. Два решения; расстояние от точки C до концов диаметра равны 12 см и 16 см. 319. 12 см и 5 см. 320. Можно; стороны прямоугольника 7 см и 24 см. 321. 18 км/ч и 12 км/ч. 322. 50 м/мин и 60 м/мин. 332. а) 9; б) -2; в) 1. 333. 1) Промежутку [10; 20]; 2) к правому. 334. а) один корень; 522 и 523; б) один корень; 9 и 10. 336. Два корня; 3,3 — приближение с недостатком или 3,4 — приближение с избытком. 337. 1,58... .

Узнайте больше

Решение систем уравнений второй степени

3. 2) (4; 1), (1; 4). 4. (4; 5), (-2; -1). 5. (2; 1), (2; -3), (-4; 1), (-4; -3). 6. (2; 3), (3; 2). 7. (2; 2), (-2; -2), (2; -2), (-2; 2). 8. (1; -2), (-1; 2), (2; -1), (-2; 1).

Уравнение с параметром

4. а) При $c < 36$; при $c < 0$; б) при любом c уравнение имеет два корня разных знаков; в) при $|c| > 4$; ни при каких значениях c . 5. а) При $|a| > 1$ один корень, при $|a| \leq 1$ корней нет; б) при $|a| \geq 1$ один корень, при $|a| < 1$ два корня. 6. а) При $a = 6$ решений нет; при $a \neq 6$ система имеет единственное решение — пару $x = \frac{4-a}{6-a}$, $y = \frac{1}{6-a}$; б) при $a = 6$ система имеет бесконечное множество решений — это все пары значений переменных x и y , в которых x может быть любым числом, а соответствующее значение y получается по формуле $y = 4x - 1$, при $a \neq 6$ система имеет единственное решение — пару $x = 0$, $y = -1$. 7. При $a > 0$; при $a < -2$; при $a \neq 0$ — пара (0; 1), при $a = -2$ — пара (-1; 0). 8. При $b < -20$. 9. Два, одно, ни одного; одно решение при $c = 1$, нет решений при $c > 1$. 10. 1) Одно, два, три, четыре или ни одного решения; 2) при $-1 < a < 1$ и при $a = -\sqrt{2}$; при $a = -1$. 11. При $c = \pm 2$; при $-2 < c < 2$.

Глава 4

340. а) 2; б) 0,1428571428. 341. 3) $\frac{39}{40}$; это c_{16} . 346. в) $c_n = \frac{1}{n}$; г) $c_n = \frac{n}{n+1}$; д) $c_n = \frac{n+1}{n}$; е) $c_n = \frac{1}{2^n}$. 355. а) $a_1 = 64$, $a_{n+1} = a_n - 4$; б) $c_1 = 3$, $c_{n+1} = c_n + 5$; в) $x_1 = 1$, $x_{n+1} = 3x_n$; г) $b_1 = 500$, $b_{n+1} = 0,1b_n$. 359. Это члены от c_1 до c_6 включительно. 367. а) $d = 0,5$; б) $d = -3$. 368. а) $x_1 = 12$; б) $x_1 = 100$. 369. а) $n = 41$; б) $n = 64$. 370. 83. 371. Число 88 не является; число 99 является, это 15-й член. 372. а) 6; 10; 14; 18; 22; 26; 30; б) -7; 0,5; 8; 15,5; 23. 373. а) $a_n = 2n - 5$; б) $a_n = 5 - n$. 374. б) на высоте 4500 м; в) на 11-й минуте. 377. а) 200; б) 1248.

379. б) 880; в) $2n^2 + 4n$. 380. а) 175,5; б) 1218; в) $\frac{15n^2 + 9n}{20}$. 381. 1) 1830; 2) 20.
 382. 1) 325 шаров; 2) в 10-м треугольнике. 383. 1) -1560; 2) 10. 384. а) 3105; б) 494550; в) 2240; г) 1800. 385. 2) 10 столбцов. 386. 3960. 388. 315 кресел.
 389. На 11-й день; 12 ч 50 мин. 390. На 200 м; 231 км. 391. Первый сотрудник должен получить 325 р. 392. 3) $S_{20} = 295$. 399. а) $q = \sqrt{2}$; б) $q = \frac{1}{\sqrt{5}}$.
 401. а) $y_8 = 27$; $y_{11} = 729$; б) $y_6 = 8$; $y_9 = 1$; в) $y_7 = 24$; $y_{10} = -192$; г) $y_3 = -2$; $y_6 = \frac{2}{27}$. 402. а) 81; б) $-\frac{1}{64}$. 403. а) Два решения. 1) $q = \sqrt{3}$; числа $3\sqrt{3}$, 9, $9\sqrt{3}$; 2) $q = -\sqrt{3}$; числа $-3\sqrt{3}$, 9, $-9\sqrt{3}$; б) Одно решение: $q = 4$; числа 0,8; 3,2. 407. а) Примерно 150 тыс. бактерий. 408. а) 128 см; б) 125 см. 410. 1) 0,5 см; 2) пятого треугольника. 411. 1) $\frac{1}{2}$; 2) ромб; 96 см²; 3) пятый четырёхугольник; прямоугольник. 412. 3) а) $b_1 = 3$; $b_3 = 12$; $b_5 = 48$; $b_6 = 96$; б) $b_2 = 81\sqrt{3}$; $b_6 = 9\sqrt{3}$; $b_8 = 3\sqrt{3}$. 414. а) $S_n = \frac{6^n - 1}{5}$; $S_6 = 9331$; б) $S_n = \frac{2^n - 1}{2^{n-1}}$; $S_6 = 1\frac{31}{32}$; в) $S_n = \frac{1 - (-2)^n}{6}$; $S_6 = -10\frac{1}{2}$. 416. а) $\frac{255}{512}$; б) $-6\frac{7}{9}$. 417. а) 2604; б) 60.
 418. а) $-40\frac{4}{9}$; б) $-31\frac{7}{8}$ или $10\frac{5}{8}$. 419. а) $S_{10} = 2(3^{10} - 1)$; 118096; б) $S_8 = -3(2^8 - 1)$; -765; в) $S_{10} = \frac{2^{10} - 1}{-3}$; -341; г) $S_{11} = \frac{(-3)^{11} - 1}{-4}$; 44287. 420. $S = 2^{32} - 1$; 4 294 967 295 зёрен. 421. 1 852 000 р. 422. 665 писем. 423. 364 телеграфистка.
 424. 6000 р., 9000 р., 13 500 р., 20 250 р. 427. а) 800 р.; $800n$ р.; б) через 13 месяцев. 428. а) За 306 000 р.; $450\,000 - 36\,000n$ (р.); б) через 6 лет. 429. $D = 15\,000 \cdot 1,065^n$. 430. Примерно 56 слов. 431. а) $C = 120\,000 + 18\,000n$ (р.); 336 000 р.; 552 000 р.; б) $P = 1\,080\,000 - 18\,000n$; 864 000 р.; 648 000 р.; в) на 5 лет. 432. а) Верно; б) Неверно, примерно в 2,1 раза больше.

Узнайте больше

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

1. а) 1; в) $31\frac{1}{4}$. 2. 1111 $\frac{1}{9}$ шага. 3. а) $\frac{7}{9}$; б) $\frac{4}{33}$; в) $\frac{2}{15}$.

Треугольник Паскаля

5. $C_n^m = C_n^{n-m}$. 6. в) $x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1$; г) $a^4 + 8a^3c + 24a^2c^2 + 32ac^3 + 16c^4$; д) $8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3$.

Глава 5

435. в) 5 %. 436. б) 23. 437. а) 8 ч 30 мин; б) 7 ч 30 мин; в) 50 %. 438. а) 3,5 %; б) 10 %; г) 2,6 %. 439. Соответствуют. 440. а) 10 %; б) 60 %. 443. б) 48 кв.м. 445. б) 560 человек, 56 %. 448. а) $\bar{x}_1 = 10$, $\sigma_1^2 = 28$, $\sigma_1 \approx 5,3$; $\bar{x}_2 = 15$, $\sigma_2^2 = 18,8$, $\sigma_2 \approx 4,3$. 451. Витя, Оля, Петя. 452. а) 25 см; б) 0,5 см; в) 60 %, 20 %. 461. а) 25 лампочек. 462. 0,22. 463. 250. 465. Вероятности равны. 466. 30. 467. $\approx 32\,880$. 468. 3200 рыб; более 3200 рыб. 469. а) $A_{12}^3 = 12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320$; б) $C_{12}^3 = \frac{1320}{6} = 220$. 470. а) $A_{10}^4 = 5040$; б) $C_{10}^4 = 210$. 472. C_{36}^5 . 473. A_{26}^4 . 475. C_{30}^2 , C_{30}^3 , C_{30}^4 . 476. $C_7^2 \cdot C_5^3 = 210$. 477. $2 \cdot C_{22}^{10}$. 479. а) $\frac{1}{C_5^2} = \frac{1}{10}$; б) $\frac{1}{C_{10}^3} = \frac{1}{120}$. 480. $\frac{C_4^3}{C_6^3} = \frac{1}{5}$. 481. $\frac{A_8^3}{C_9^4} = \frac{1}{9}$.